Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 133–137

Неоднородная краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка и неограниченным модулем ее коэффициента для угла

Пятрас АЛЕКНА (ŠU)
e-mail: mat.kat@fm.su.lt

В комплексной плоскости дан угол ω $(0 < \omega < 2\pi)$ с вершиной в точке $z = 0$, одна сторона которого L_2 совпадает с положительной частью вещественной оси. Обозначим $D^+ = \{z\colon\ 0 < \arg z < \omega\}$, $D^- = \{z\colon\ \omega < \arg z < 2\pi\}$. Положительное направление контура $L = L_1 \bigcup L_2$ выбираем так, чтобы область D^+ оставалась слева при обходе контура L. Конечную часть контура L обозначим через $L^0 = L \bigcap (|z| \leqslant R)$, где R – достаточно большое число.

Рассматривается неоднородная краевая задача Римана:
найти функции $\Phi^{\pm}(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в областях $D^{\pm}$ (класс $\mathcal{B}$), предельные значения которых $\Phi^{\pm}(t)$ на контуре $\widetilde{L} = L \backslash \{\infty\}$ удовлетворяют краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \widetilde{L}, \tag{1}$$

где относительно коэффициента $G(t)$ и свободного члена $g(t)$ сделаны следующие предположения:

$$\ln G(t) \in \mathcal{D}_p(L^0), \quad p > 1, \tag{2}$$

$$\ln G(t) = \psi_k(t) \ln^{\rho_k} |t| + i\varphi_k(t) \ln^{\alpha_k} |t|, \quad \text{если} \quad t \in L_k \backslash L_k^0, \tag{3}$$

$$0 < \rho_k < \infty, \quad \alpha_k \geqslant 1, \quad k = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} &\psi_k(t) \in \mathcal{D}_{\delta_k}(L_k \backslash L_k^0), \lim_{t\to\infty, t\in L_k} \psi_k(t) = \varkappa_k,\ \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 > 0, \quad \delta_k > \rho_k + 2; \\ &\varphi_k(t) \in \mathcal{D}_{\beta_k}(L_k \backslash L_k^0), \lim_{t\to\infty, t\in L_k} \varphi(t) = \lambda_k, \quad \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0,\ \beta_k > \alpha_k + 2; \end{aligned} \tag{4}$$

$$g(t) \in \mathcal{D}_{q_k}(L_k), \quad q_k > \max(\rho_k, \alpha_k) \quad \text{и} \quad g(\infty) = 0. \tag{5}$$

Из (3) и (4) следует, что модуль коэффициента $|G(t)| = \exp\{\psi_k(t) \ln^{\rho_k} |t|\}$ не ограничен, а задача (1)–(5) имеет бесконечный индекс логарифмического порядка.

В работах автора [1]–[2] модуль коэффициента $|G(t)|$ был ограничен. В этой статье обобщается полученные результаты [4] с неограниченным модулем ее коэффициента для угла.

Каноническую функцию рассматриваемой задачи (1)–(4) запишем в виде произведения двух функций

$$X^{\pm}(z)=\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau-z)}\,\mathrm{d}\tau\right\}\cdot\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\ln G(x)}{x(x-z)}\,\mathrm{d}x\right\}\equiv X_1(z)X_2(z). \quad (6)$$

Используя асимптотику интеграла типа Коши с логарифмической плотностью [3], получаем асимптотическое равенство для каждой из функций $X_k(z)$ $(k=1,2)$, $z\to\infty$:

$$X_1(z)=\exp\left\{\varkappa_1\frac{(2\pi i)^{\rho_1}}{\rho_1+1}\mathbb{B}_{\rho_1+1}\left(\frac{\ln z-i\omega}{2\pi i}\right)-i\lambda_1\frac{(2\pi i)^{\alpha_1}}{\alpha_1+1}\mathbb{B}_{\alpha_1+1}\left(\frac{\ln z-i\omega}{2\pi i}\right)+S_1(z)\right\}, \quad (7)$$

$$X_2(z)=\exp\left\{\varkappa_2\frac{(2\pi i)^{\rho_2}}{\rho_2+1}\mathbb{B}_{\rho_2+1}\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right)-i\lambda_2\frac{(2\pi i)^{\alpha_2}}{\alpha_2+1}\mathbb{B}_{\alpha_2+1}\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right)+S_2(z)\right\}, \quad (8)$$

где $\mathbb{B}_{\rho_k+1}(w)$, $\mathbb{B}_{\alpha_k+1}(w)$ – многочлены Бернулли, а ветви $(\ln z-i\omega)^{\alpha_1}$, $(\ln z-i\omega)^{\rho_1}$ и $\ln z-i\omega$ непрерывны в области $(R<|z|<\infty)\cap(\omega<\arg z<\omega+2\pi)$ и $(\ln z-i\omega)^{\rho_1}>0$, $(\ln z-i\omega)^{\alpha_1}>0$, $\ln z-i\omega>0$ на верхнем берегу разреза по лучу $\arg z=\omega$; $\ln^{\rho_2}z$, $\ln^{\alpha_2}z$ непрерывны в области $(R<|z|<\infty)\cap(0<\arg z<2\pi)$ и $\ln^{\rho_2}x>0$, $\ln^{\alpha_2}x>0$, $\ln x>0$ на верхнем берегу разреза по лучу $\arg z=0$; $S_k(z)$ – ограниченная функция в окрестности $z=\infty$.

Из линейности краевого условия (1) следует, что достаточно найти частное решение $\Phi_0^{\pm}(z)\in\mathcal{B}$ неоднородной задачи (1)–(5), после чего общее решение этой задачи будет

$$\Phi^{\pm}(z)=\Phi_0^{\pm}(z)+\Psi^{\pm}(z),\qquad z\in\boldsymbol{D}^{\pm}, \quad (9)$$

где $\Psi^{\pm}(z)$ – общее решение в классе $\mathcal{B}$ соответствующей однородной задачи

$$\Psi^{+}(t)=G(t)\Psi^{-}(t),\qquad t\in\widetilde{L}. \quad (10)$$

Для построения частного решения $\Phi_0^{\pm}(z)$ вместо задачи (1)–(5) рассматриваются две вспомогательные неоднородные задачи:

$$\Phi_1^{+}(t)=G(t)\Phi_1^{-}(t)+g_1(t),\qquad g_1(t)=\begin{cases}g(t), & t\in L_1,\\ 0, & t\in L_2,\end{cases} \quad (11)$$

и

$$\Phi_2^{+}(t)=G(t)\Phi_2^{-}(t)+g_2(t),\qquad g_2(t)=\begin{cases}0, & t\in L_1,\\ g(t), & t\in L_2.\end{cases} \quad (12)$$

Если $\Phi_{10}^{\pm}(z)$ и $\Phi_{20}^{\pm}(z)$ – ограниченные частные решения соответственно задач (11) и (12), то $\Phi_0^{\pm}(z)=\Phi_{10}^{\pm}(z)+\Phi_{20}^{\pm}(z)$ будет частным решением исходной задачи (1)–(5) в классе $\mathcal{B}$.

Пропуская промежуточные вычисления, связанные с построениям частных решений вспомогательных задач (11) и (12) [3], сформулируем окончательные результаты исследования.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполнены условия* (2)–(5), $0 < \rho_k \leqslant 1$, *частное решение однородной задачи* (10)

$$\Psi_{10}^{\pm}(z) = \prod_{k=1}^{2} F_{1k}(z) X_k(z),$$

где целые функции $F_{11}(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r'_n}\right)$, *модули нулей* r'_n *равные наибольшему вещественному корню уравнения*

$$2\sum_{l=0}^{[\frac{\alpha_2}{2}]} a_l \ln^{\alpha_2 - 2l} x = 2n - 1,$$

$$F_{12}(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r''_n}\right), \quad r''_n = \exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{\lambda_2}\right\}^{\frac{1}{\alpha_1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

а для $X_k(z)$ *справедливы асимптотические равенства* (7) *и* (8), *то*

$$\Phi_{10}^{\pm}(z) = -\frac{\Psi_{10}^{\pm}(z)}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{g(x e^{i\omega})\,dx}{\Psi_{10}^{+}(x e^{i\omega})(x - z e^{-i\omega})}$$

есть частное ограниченное решение вспомогательной задачи (11).

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнены условия* (2)–(5), $0 < \rho_k \leqslant 1$, *частное решение однородной задачи* (10)

$$\Psi_{20}^{\pm}(z) = \prod_{k=1}^{2} F_{2k}(z) X_k(z),$$

где целые функции

$$F_{21}(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r'_m e^{i\omega}}\right), \quad r'_m = \exp\left\{\frac{(2m-1)\pi}{-\lambda_1}\right\}^{\frac{1}{\alpha_2}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$F_{22}(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r''_m e^{i\omega}}\right),$$

r''_m *равен наибольшему вещественному корню уравнения*

$$2\sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_1}{2}]} b_j \ln^{\alpha_1-2j} x = 2m-1,$$

то

$$\Phi_{20}^{\pm}(z) = -\frac{\Psi_{20}^{\pm}(z)}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{g(x)\,\mathrm{d}x}{\Psi_{20}^{+}(x)(x-z)}$$

есть частное ограниченное решение вспомогательной задачи (12).

Замечание. Коэффициенты a_l вычисляются из условия

$$|F_{1k}(\tau)X_k(\tau)| = \mathrm{O}(1) \quad \text{при } \tau\to\infty,\ \tau\in L_k,$$

с использованием асимптотической формулы (7), а коэффициенты b_j – из условия

$$|F_{2k}(\tau)X_k(\tau)| = \mathrm{O}(1) \quad \text{при } \tau\to\infty,\ \tau\in L_k\ (k=1,2)$$

с использованием асимптотической формулы (8).

ТЕОРЕМА 3. *Если выполнены условия* (2)–(5), $\rho_k > 1$, *а* $F_p(z)$ $(p = 1,2,3,4)$ – *целые функции нулевого порядка, нули которых расположены на* L_2, *определены равенствами:*

$$F_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_n^{(1)}}\right), \quad r_n^{(1)} = \exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{\lambda_2}\right\}^{\frac{1}{\alpha_2}},$$

$$F_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_n^{(2)}}\right), \quad \mathrm{Re}\left(\ln r_n^{(2)} - \omega i\right)^{\alpha_1} = (2n-1)\pi(-\lambda_1)^{-1},$$

$$F_3(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_n^{(3)}}\right), \quad r_n^{(3)} = \exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{\varkappa_2}\right\}^{\frac{1}{\rho_2}},$$

$$F_4(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_n^{(4)}}\right), \quad \mathrm{Re}\left(\ln r_n^{(4)} - \omega i\right)^{\rho_1} = (2n-1)\pi(-\varkappa_1)^{-1},\ n=1,2,3,\ldots;$$

то

$$\Phi_{10}^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)\cdot\prod_{k=1}^{4}F_p(z)}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{g(x\mathrm{e}^{i\omega})\,\mathrm{d}x}{\prod_{p=1}^{4}F_p(x\mathrm{e}^{i\omega})X^{+}(x\mathrm{e}^{i\omega})(x-z\mathrm{e}^{-i\omega})}$$

есть частное решение вспомогательной задачи (11) *в классе* $\mathscr{B}$.

ТЕОРЕМА 4. *Если выполнены условия* (2)–(5), $\rho_k > 1$, $\varkappa_1 < 0$, $\varkappa_2 > 0$, *а* $G_p(z)$ $(p = 1, 2, 3, 4)$ – *целые функции нулевого порядка, нули которых расположены на* L_1, *определены равенствами:*

$$G_1(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_m^{(1)} e^{i\omega}}\right), \quad r_m^{(1)} = \exp\left\{\frac{(2m-1)\pi}{-\lambda_1}\right\}^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

$$G_2(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_m^{(2)} e^{i\omega}}\right), \quad \operatorname{Re}\left(\ln r_m^{(2)} - \pi i\right)^{\alpha_2} = (2m-1)\pi(\lambda_2)^{-1},$$

$$G_3(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_m^{(3)} e^{i\omega}}\right), \quad r_m^{(3)} = \exp\left\{\frac{(2m-1)\pi}{-\varkappa_1}\right\}^{\frac{1}{\rho_1}},$$

$$G_4(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_m^{(4)} e^{i\omega}}\right), \quad \operatorname{Re}\left(\ln r_m^{(4)} - \omega i\right)^{\rho_2} = (2m-1)\pi(\varkappa_2)^{-1}, \quad m=1,2,3,\dots;$$

то

$$\Phi_{20}^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)\cdot\prod_{p=1}^{4} G_p(z)}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{g(x)\,dx}{\prod_{p=1}^{4} G_p(x) X^{+}(x)(x-z)}$$

есть частное решение вспомогательной задачи (12) *в классе* $\mathcal{B}$.

Литература

1. П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **14**(3), 5–18 (1974).
2. П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\min(\alpha, \beta) \geqslant 1$ для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **15**(1), 5–22 (1975).
3. P. Alekna. Inhomogene Riemannsche Randwertaufgabe mit positive unendlichen Index der Logaritmischen Ordnung $\min(\alpha, \beta) > 1$ für einen Winkelraum, *Complex Variables*, **16**, 273–288 (1991).
4. П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с неограниченным коэффициентом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **42** (spec. nr.), 155–158 (2002).

REZIUMĖ

P. Alekna. Logaritminės eilės plius begalinio indekso nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys su neaprėžtu jo koeficiento moduliu kampui

Išnagrinėtas logaritminės eilės begalinio indekso nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys su logaritminės eilės $0 < \rho_k < \infty$ neaprėžtu jo koeficiento moduliu kampui aprėžtų analizinių funkcijų klasėje $\mathcal{B}$.