Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 439–441

Apie stabilumo įverčius be simetriškumo sąlygos

Romanas JANUŠKEVIČIUS (VPU), Olga JANUŠKEVIČIENĖ* (MII)
el. paštas: romjan@takas.lt

Tarkime, kad $X, X_1, X_2, ..., X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. B. Ramachandran ir C.R. Rao [1] įrodė, kad jei empirinio vidurkio $\overline{X} = \overline{X}(n) = (X_1 + ... + X_n)/n$ ir monomo X skirstiniai sutampa bent dviem kintamojo n reikšmėms $n = j_1$ ir $n = j_2$ tokioms, kad santykis $\log j_1/\log j_2$ yra iracionalus, tai atsitiktiniai dydžiai $X, X_1, X_2, ..., X_n$ turi Koši skirstinį.

Tarkime dabar, kad paminėti statistikų $\overline{X}(n)$ ir X skirstiniai bent dviem n reikšmėms $n = j_1$ ir $n = j_2$ sutampa ne tiksliai, bet tam tikra prasme apytiksliai, su paklaida ε. Ar galima tada tvirtinti, kad atsitiktinių dydžių $X, X_1, ..., X_n$ skirstiniai yra artimi tam tikra prasme Koši skirstiniui?

Teigiamas atsakymas į šį klausimą metrikoje λ buvo gautas darbe [2]. Priminsime šios metrikos apibrėžimą:

$$\lambda(X, Y) = \min_{T>0} \max \left\{ \frac{1}{2} \max_{|t| \leqslant T} |f_X(t) - f_Y(t)|, \frac{1}{T} \right\},$$

kur $f_X(t)$ ir $f_Y(t)$ yra atitinkamai atsitiktinių dydžių X ir Y charakteristinės funkcijos. Darbe [2] buvo įrodyta, kad jei sąlyga $\lambda(\overline{X}(n), X) \leqslant \varepsilon$ yra tenkinama bent dviem n reikšmėms $n = j_1$ ir $n = j_2$, o nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai $X, X_1, X_2, ..., X_n$ yra simetriniai, tai egzistuoja atsitiktinis dydis Z, turintis Koši skirstinį, ir konstantos $\delta > 0$ ir $C > 0$ tokios, kad

$$\lambda(X_i, Z) \leqslant C\varepsilon^{\delta}. \tag{1}$$

Šio straipsnio tikslas – sukonstruoti stabilumo įvertį (1) be simetriškumo sąlygos. Tokiu atveju nagrinėjamos charakteristinės funkcijos nėra realios, o tai apsunkina stabilumo įverčio (1) konstravimą.

TEOREMA. *Tarkime, kad* $X, X_1, ..., X_{j_1}, ..., X_{j_2}$ *yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, o* j_1 *ir* j_2 *yra natūralieji skaičiai, kurių logaritmų santykis* $\log j_1/\log j_2$ $(2 \leqslant j_1 < j_2)$ *yra iracionalus. Tarkime be to, kad empiriniai vidurkiai* $\overline{X}(j_1)$ *ir* $\overline{X}(j_2)$ *beveik sutampa su* X *šia prasme:*

*Autorės darbą parėmė Lietuvos valstybinis mokslo ir studijų fondas, projekto registracijos Nr. T-10/06

$$\lambda\left(X, \overline{X}(j_1)\right) \leqslant \varepsilon, \quad \lambda\left(X, \overline{X}(j_2)\right) \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Jei, be to, egzistuoja realus $z_* \neq 0$ toks, kad

$$\operatorname{Im}\log E\exp(iz_*X) = 0, \tag{3}$$

tai egzistuoja atsitiktinis dydis Y, turintis Koši skirstinį, ir konstantos $\delta > 0$ ir $C > 0$ tokios, kad bet kuriam i

$$\lambda(X_i, Y) \leqslant C\varepsilon^{\delta}. \tag{4}$$

Įrodymas. Iš autorių darbo [3] gauname, kad jei $f(z)$ – atsitiktinio dydžio X charakteristinė funkcija, tai

$$\left| f(z) - \exp\left\{-|\Lambda_\theta|\exp(iD_\theta \operatorname{sign} z)\,|z|\left(\theta z^*\right)^{-1}\right\}\right| \leqslant C_1\left(\varepsilon + \varepsilon^{\delta}\right), \quad |z| \leqslant 1/\varepsilon, \tag{5}$$

kur

$$\Lambda_\theta = j_1 \log f(\theta z^*/j_1), \quad D_\theta = \arctan \operatorname{Im}\Lambda_\theta/\operatorname{Re}\Lambda_\theta), \ \theta = \inf\left\{|u|\colon \left|f(uz^*)\right| = 1/2\right\},$$

o z^* yra apibrėžiamas žemiau.

Parinkime dabar z^* taip, kad

$$\theta z^*/j_1 = z_{*.} \tag{6}$$

Iš (3) ir (6) gauname, kad $\operatorname{Im}\Lambda_\theta = 0$. O tai reiškia, kad

$$D_\theta = \arctan(\operatorname{Im}\Lambda_\theta/\operatorname{Re}\Lambda_\theta) = 0. \tag{7}$$

Yra žinoma, kad stabiliųjų skirstinių klasę sudaro aibė skirstinių, priklausančių nuo keturių parametrų $\alpha \in (0; 2]$, $\beta \in [-1; 1]$, $\gamma \in (-\infty; +\infty)$, $\lambda \in (0; +\infty)$. Stabiliojo skirstinio charakteristinę funkciją $y(t)$ galima užrašyti taip:

$$\log y(t) = it\gamma - \lambda|t|^{\alpha}\,\omega(t, \alpha, \beta), \tag{8}$$

kur

$$\omega(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\operatorname{sign} t\right), \text{ kai } \alpha \neq 1, \\ 1 + i\beta\frac{2}{\pi}\log|t| \ \operatorname{sign} t, \text{ kai} \alpha = 1, \end{cases}$$

$$K(\alpha) = 1 - |1-\alpha| = \min(\alpha, 2-\alpha).$$

Formulėje (8) paėmę

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \lambda = |\Lambda_\theta| \left(\theta z^*\right)^{-1} = |\Lambda_\theta| \,/\, (j_1 z_*)\,,$$

iš sąryšių (5) ir (7) gauname (4).

Teorema įrodyta.

Literatūra

1. B. Ramachandran, C.R. Rao, Solutions of functional equations arising in some regression problems and a characterization of the Cauchy law, *Sankhyā*, ser. A, **32**(1), 1–30 (1970).
2. R. Januškevičius, S. Baliukonytė, Koši skirstinio charakterizacijos stabilumas, *Liet. matem. rink.*, **45** (spec. nr.), 539–541 (2005).
3. R. Yanushkevichius, O. Yanushkevichiene, Some remarks on the application of Diophantine approximations for finding estimations of stability, *Journal of Math. Sciences*, **138**(1), 5480–5482 (2006).

SUMMARY

R. Januškevičius, O. Januškevičienė. On stability estimations without any conditions of symmetry

Let $X, X_1, X_2, ..., X_n$ be i.i.d. random variables. B. Ramachandran and C.R. Rao have proved that if distributions of sample mean $\overline{X} = \overline{X}(n) = (X_1 + ... + X_n)/n$ and monomial X are coincident at least at two points $n = j_1$ and $n = j_2$ such that $\log j_1 / \log j_2$ is irrational, then X follows a Cauchy law. Assuming that condition of coincidence of $\overline{X}(n)$ and X are fulfilled at least for two n values, but only approximately, with some error ε in metric λ, we prove (without any conditions of symmetry) that, in certain sense, characteristic function of X is close to the characteristic function of the Cauchy distribution.

Keywords: stability estimations, Cauchy distribution, sample mean, identically distributed statistics.