

## Funkcijų aproksimavimo mokymas kompiuterių klasėje

Vilija DABRIŠIENĖ, Regina Dalytė ŠILEIKIENĖ (KTU)

el. paštas: vilija.dabrisiene@ktu.lt

Pastaraisiais metais matematikos mokymo ir mokymosi procesą universitetiniame lygmenyje įtakoja daugybė pokyčių. Tarptautinė Matematikos mokymo komisija [2] tarp svarbiausių iš jų pažymi augantį skirtumą tarp vidurinio ir aukštojo mokslo, apimančių ugdymo tikslus, didaktines nuostatas, vertinimo sistemą. Kita tendencija – didėjant bendram studentų skaičiui, atsiranda studentų, kurių pradinės žinios ir mokymosi motyvacija yra labai žema. Trečioji – staigus technologijų vystymasis, leidžiantis matematikos dėstytojų procese išvelgti naujas galimybes.

Universitetiniai matematikos mokymo metodai turi tendenciją likti konservatyvūs [2], turinys orientuotas į matematikos teoriją, kurios taikymui ir modeliavimui skiriamas per mažas dėmesys. Tačiau šiuolaikiniams studentams toks, atitrūkęs nuo praktikos, perteikiamas tik verbaline ar rašytine forma mokymo turinys atrodo nebepatrauklus ir nenaudingas. Kita vertus, kaip jau minėta studentų pradinės žinios, o ypač standartinių matematikos veiksmų atlikimo įgūdžiai dažnai yra prasti.

Su šiomis problemomis mes susidūrėme dėstydami matematikos disciplinas būsimiems inžinieriams mechanikams. Per paskutiniuosius tris metus šiame fakultete daugiau nei trečdalis studentų neįveikė matematikos kurso. Todėl išryškėjo poreikis kurti naujas tokias matematikos mokymo metodikas, kurios:

- formuotų teigiamą studentų požiūrį į žinias ir mokymosi procesą; išryškintų matematinių žinių svarbą ir pritaikomumą;
- būtų paremtos aktyvia ir savarankiška studentų veikla;
- svarbiausias dėmesys būtų skiriamas ne detalėms, bet tam, kad studentai susiformuotų visuminį požiūrį į einamą kursą, todėl svarbiausia medžiaga turi būti suvokiama, analizuojama ir vertinama iš įvairių pozicijų;
- įgalintų studentus įsisavinti einamą kursą, nepaisant silpnų įgūdžių atlikti įvairius algebrinius veiksmus.

Poreikis kurti tokias metodikas sutapo su kompiuterių klasių, skirtų matematikos mokymui įrengimu universitete, kai pratybų metu studentas gali naudotis taikomosiomis programomis.

Taigi, šio **straipsnio tikslas** – atskleisti funkcijų aproksimavimo mokymo kompiuterių klasėje metodiką, bei išryškinti tokio mokymo privalumus ir trūkumus lyginant su tradicinėmis metodikomis.

### Tyrimo uždaviniai:

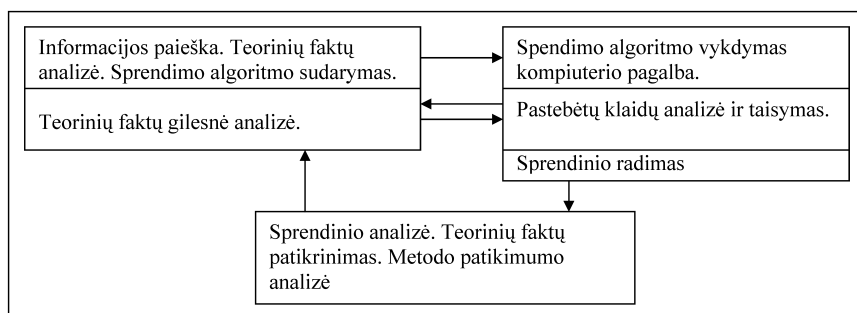
- atskleisti autorių siūlomos metodikos bendrąsias didaktines nuostatas;

- pateikti siūlomos metodikos taikymo pavyzdžių;
- aptarti empirinio tyrimo (studentų anketinės apklausos) rezultatus, atskleidžiančius siūlomos metodikos efektyvumą.

### Funkcijų aproksimavimo mokymo kompiuterių klasėje metodikos didaktinės nuostatos

Rengiant funkcijų aproksimavimo mokymo metodiką kompiuterių klasėje, teko analizuoti tiek tradicinius mokymo būdus, tiek kompiuterio teikiamas galimybes [1]. Tradicinė matematikos mokymo universitete didaktika yra paremta tiesiniu modeliu: „teorija → uždavinių sprendimas“. Tokių modelių diktuoja ir mokymo organizavimo formos: teorinė paskaita- pratybos. Šios mokymo formos nesikeitė ir mūsų siūlomoje metodikoje, tačiau siekėme keisti tradicinį tiesinį modelį „teorija → uždavinių sprendimas“ taip, kad pagrindiniai teoriniai faktai būtų visapusiškai analizuojami ir vertinami. Teorinių paskaitų metu studentai būdavo supažindinami su pagrindiniais teoriniais faktais, tačiau pagrindinė jų analizė ir vertinimas vyko e-pratybų metu.

Rėmėmės prielaida, kad pirmasis uždavinio sprendimo etapas – sąlygos suvokimas ir sprendimo plano sudarymas – reikalauja gebėjimų analizuoti, ieškoti informacijos. Čia praverčia studentų paskaitų užrašai, vadovėliai. Tačiau šiame etape studentas tik gana paviršutiniškai susipažįsta su teorija. Antrajame etape, kai reikia įvykdyti susidarytą sprendimo planą, reikia daugiausiai gebėjimų atlikti standartinius matematinius veiksmus. Čia silpnus studentų įgūdžius kompensuoja programinė įranga. Tačiau šiame etape neišvengiamai atsiranda klaidų. Atliekant skaičiavimus, braižant grafikus kompiuteriu, klaidos pastebimos iš karto ir tenka jas pašalinti. Taigi studentas priverstas vėl gilintis į teoriją, tik jau kur kas nuodugniau. Šiame etape pastebima tai, kas seniau buvo praleista. Teorinės žinios suvokiamos kur kas giliau, neišvengiamai tenka atsakinėti į klausimus „kodėl?“. Trečiasis etapas – gautojo sprendinio tikrinimas, tyrimas ir išvadų darymas. Šio etapo metu geriausiai galima susiformuoti visuminį požiūrį, išvelgti teorinių žinių pritaikymo galimybes. Šis etapas labai svarbus tuo, kad yra galimybė dar kartą permąstyti teorines žinias, įsitikinti taikomų metodų efektyvumu. Todėl remdamomis šiais etapais stengėmės sudaryti tokias užduotis, kad studentų veikla būtų pagrįsta schema, atvaizduota 1 pav.



1 pav. Užduoties atlikimo loginė schema.

### Mokymo metodikos taikymo pavyzdys

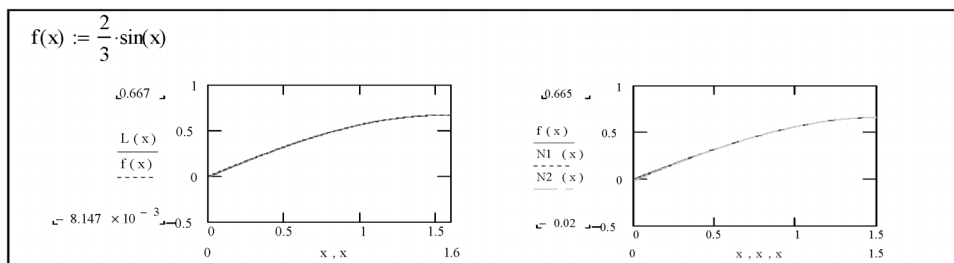
Kompiuterinių pratybų metu, studentams buvo pateikiamos užduotys, kurias jie galėdavo atlikti naudodamiesi visais informacijos šaltiniais: vadovėliais, paskaitų užrašais, dėstytojo pagalba ir pan. Pateiksime tokios užduoties pavyzdį:

- Raskite diferencialinės lygties  $y' \sin x + 2y \cos x = \sin 2x$  sprendinį  $y = f(x)$ , tenkinantį pradinę sąlygą  $y = \frac{1}{3}$ ; kai  $x = \frac{\pi}{6}$ . Sudarykite gautojo sprendinio reikšmių lentelę taškuose  $X_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{6} + 0,2$ ,  $x_3 = \frac{\pi}{6} + 0,4$ ,  $x_4 = \frac{\pi}{6} + 0,6$ ,  $x_5 = \frac{\pi}{6} + 0,8$ .
- Sudarykite Lagrandžo ( $L(x)$ ) ir Niutono interpoliacinius daugianarius pagal pirmąją ir antrąją formulę ( $N_1(x)$  ir  $N_2(x)$ ). Nubrėžkite funkcijų  $f(x)$ ,  $L(x)$ ,  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  grafikus. Įvertinkite aproksimavimo paklaidas intervale  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 0,8]$ .
- Šiame intervale išspręskite duotąją lygtį apytiksliai Oilerio metodu, kai  $h = 0,2$ . Skaičiavimo rezultatus surašykite matricose  $\alpha$ ,  $\beta$ . Nubrėžkite grafiką, įvertinkite paklaidas.
- Raskite šios lygties apytikslį sprendinį  $y = g(x)$  Teiloro eilučių metodu (keturis eilutės narius).
- Paanalizuokite visus apytikslius duotosios diferencialinės lygties sprendinius, įvertinkite jų tikslumą. Palyginkite savo išvadas su teoriniais teiginiais apie paklaidas.

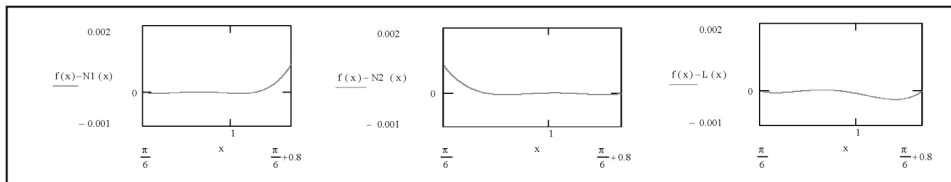
Pirmajame uždavinio sprendimo etape studentas ieško informacijos apie diferencialinių lygčių sprendimo metodus, interpoliacines formules. Remdamasis rasta informacija įprastai, be kompiuterio sprendžia diferencialinę lygtį. Kompiuterio pagalba sudaro gauto sprendinio reikšmių lentelę bei suveda į kompiuterį Niutono ir Lagrandžo interpoliacines formules, atlieka reikalingus argumentų reikšmių priskyrimus. Tuoj pat, nubrėžęs grafikus, studentas gali pasitikrinti interpoliavimo tikslumą (2 pav.).

Iš grafikų puikiausiai matosi, ar interpoliavimo formulės panaudotos tinkamai, ar jos suprastos teisingai. Jei ne, studentas priverstas vėl gilintis į teorinę medžiagą ir ieškoti klaidų. Vėliau studentui reikia įvertinti interpoliavimo paklaidas intervale  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 0,8]$ . Tai galima atlikti teoriniais metodais, tačiau galima pasinaudoti ir programos teikiamomis galimybėmis ir padaryti grafiškai (3 pav.).

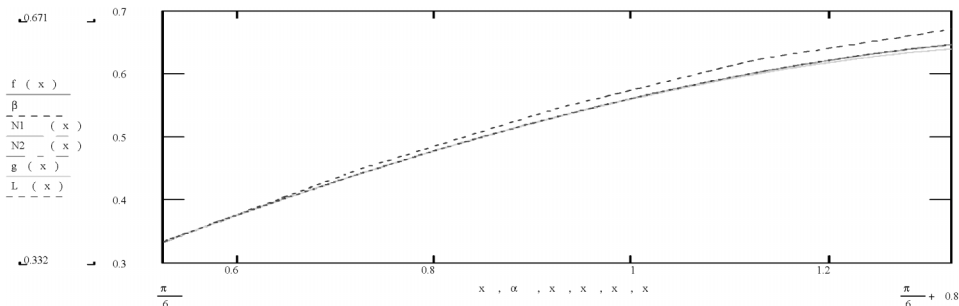
Šie grafikai padeda pagrįsti ir teorinius teiginius apie Niutono pirmosios bei antrosios interpoliacinių formulių tikslumą intervalo pradžioje ir gale. Taigi uždavinio at-



2 pav. Diferencialinės lygties sprendinio bei interpoliacinių daugianarių grafikai.



3 pav. Paklaidų grafinis nustatymas.



4 pav. Visų gautų sprendinių palyginimas.

sakymo analizė padeda pagrįsti ir patikrinti teorinius teiginius, formuoja gilesnį jų suvokimą.

Toliau sprendžiant uždavinį ciklas pradeda kartotis. Sprendžiant lygtį Oilerio bei Teiloro eilučių metodais, studentui vėl reikia ieškoti teorinių teiginių, apmąstyti, kaip galima pasinaudoti Matchad galimybėmis. Gautuosius rezultatus pavaizdavus grafiškai, iš karto matomos klaidos ir vėl reikia grįžti prie teorinių teiginių bei formulių ir dar kartą pasigilinti.

Paskutinis uždavinio sprendimo etapas – visų gautų sprendinių grafinis vaizdavimas (4 pav.).

Šis etapas leidžia palyginti visus naudotus metodus, jų tikslumą, patikimumą, palyginti gautus rezultatus su teoriniais teiginiais.

### Metodo efektyvumo tyrimas

Siekdami įvertinti metodo efektyvumą, atlikome empirinį tyrimą. Tyrimas buvo atliekamas dviem metodais- studentų veiklos e-pratybų metu stebėjimu bei studentų anketinės apklausos metodu ( $n = 112$ ). Siekėme atsakyti į šiuos tyrimo klausimus:

- Ar siūloma metodika skatima mokymosi motyvacija, didina mokomojo dalyko patrauklumą?
- Ar siūloma metodika skatina taikyti matematikos žinias mokantis ir praktinėje veikloje?
- Ar siūloma kompiuterinių pratybų metodika turi įtakos studentų mokymosi rezultatams?
- Ar kompiuterinis uždavinių sprendimo būdas slopina ar skatina mąstymą?

Pateiksime tyrimo rezultatus. Siekdami atsakyti į pirmąjį tyrimo klausimą, pateiksime apklausos rezultatus. Apklausus studentus paaiškėjo, kad jų nuomonė apie kompiuterines pratybas labai gera. 90% studentų teigia, kad jos buvo įdomios ir naudingos, 89% kad svarbios (5 pav.).

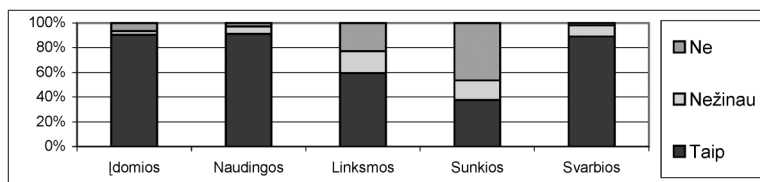
Studentų buvo prašoma palyginti kompiuterines pratybas su įprastomis matematikos pratybomis, kurias jie turėjo praeitais mokslo metais. Didžioji dauguma studentų teigia, kad mokytis buvo lengviau ir įdomiau nei įprastų pratybų metu (6 pav.).

Kitas aspektas – kaip studentai vertina įgytas žinias jų pritaikomumo aspektu. Iš patirties žinome, kad galimybės pritaikyti matematikos žinias studentams dažniausiai atrodo miglotos, todėl į anketą įtraukėme klausimus, kurie leistų studentams įvertinti šį aspektą. Paaiškėjo, kad studentai palankiai vertina įgytas žinias: labiausiai reikalingais studentai laiko Matchad galimybių žinojimą ir gebėjimus šia programa atlikti matematinius skaičiavimus, kiek prasčiau vertina kitų įgytų žinių reikalingumą, tačiau kaip visiškai nereikalingas šias žinias įvertino tik mažiau nei 10% studentų (7 pav.).

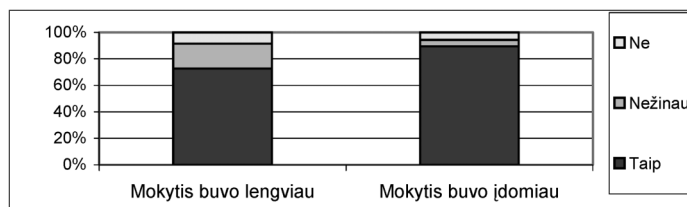
Stebėjimo duomenys rodo, kad kompiuterinių pratybų metu studentai išsiskyrė dideliu aktyvumu, susidomėjimu. Studentų teigimu, kompiuterinių pratybų metu jie išmoko daugiau nei įprastų pratybų metu. Apie 90% studentų mano, kad taikant šią metodiką galima daugiau išmokyti pratybų metu, mažiau tenka mokytis namuose (8 pav.). Studentai teigia, kad tokių pratybų metu jie yra savarankiškesni, varto sąsiuvinius, ieško informacijos, yra aktyvesni (9 pav.).

Kadangi neturime galimybės palyginti studentų mokymosi rezultatus elektroninių ir įprastų pratybų metu (nebuvo galimybių sukurti lygiaverčių kontrolinių grupių), tai tik pastebėsime, kad studentų pasiekti rezultatai buvo labai neblogi ir patenkino mūsų lūkesčius.

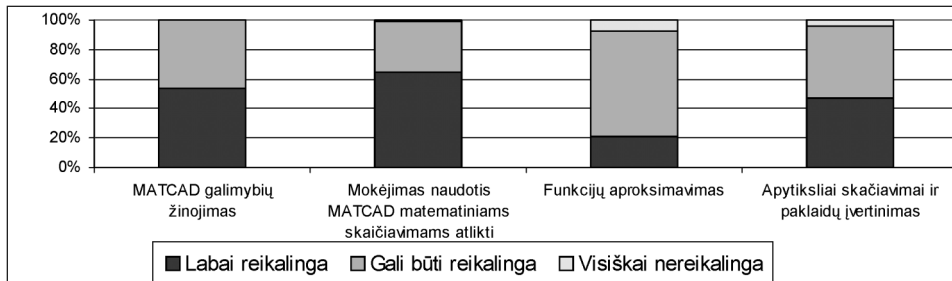
Bene įdomiausias paskutinis tyrimo klausimas: ar šios programinės įrangos naudojimas slopina ar skatina mąstymą. Kad kompiuterinės pratybos skatina mąstymą



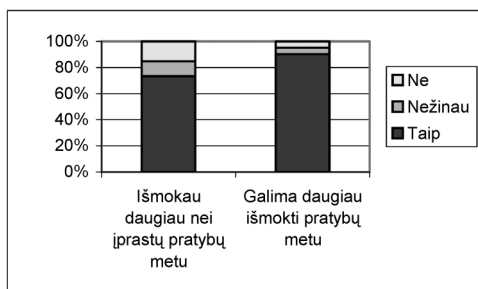
5 pav. Studentų nuomonė apie kompiuterines pratybas.



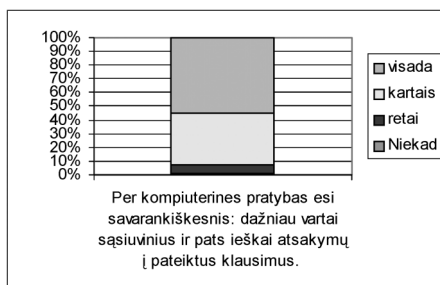
6 pav. Kompiuterinių pratybų ir įprastų pratybų palyginimas.



7 pav. Kompiuterinių pratybų metu įgytų žinių svarba.

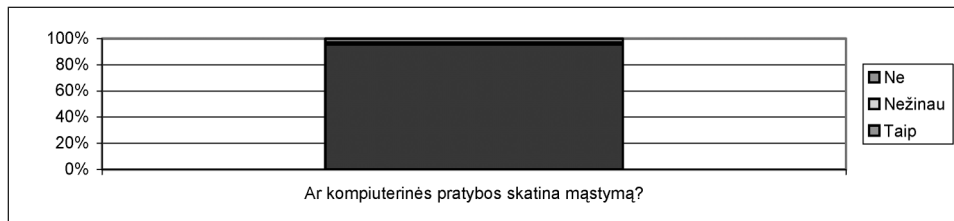


8 pav. Studentų nuomonė apie išmokimą kompiuterinių pratybų metu.



9 pav. Savarankiškumas kompiuterinių pratybų metu.

teigia 96 procentai studentų (10 pav.). Studentų teigimu kompiuterinių pratybų metu dėmesys sutelktas į uždavinio esmę, o ne į mechaninius skaičiavimus. Kompiuteris padeda iš karto pastebėti klaidas, ir taip jų išvengti. Ypatingai studentai vertina uždavinių grafinę iliustravimą, jų teigimu grafinis sprendimo būdas padeda geriau suvokti teorinius modelius.



10 pav. Studentų nuomonė apie kompiuterinių pratybų ir mąstymo ryšį.

### Išvados

1. Taikomųjų matematikos programų mokant matematikos naudojimas leidžia rengti metodikas, didesnę dėmesį skiriant ne detalėms, bet visuminiam požiūriui į einamą kursą, jo visapusiškesnei analizei, teorinių modelių praktiniam patikrinimui, vaizdumui. Siūloma metodika parengta remiantis cikliniu modeliu, kai matematinio uždavinio sprendimo metu nuolat grįžtama prie teorinių modelių, jie analizuojami ir lyginami su kompiuteriniu sprendinio variantu, analizuojamas metodo patikimumas ir paklaidos.
2. Empirinio tyrimo rezultatai rodo, kad:
  - siūloma kompiuterinių pratybų metodika padeda suformuoti teigiamą studentų požiūrį į mokymosi procesą ir įgytas žinias;
  - siūloma metodika leidžia ir silpnesnius matematinių veiksmų atlikimo įgūdžius turintiems studentams sėkmingai įsisavinti naują kursą, suprasti teorinius metodus ir praktiškai išmokyti atlikti įvairias užduotis.

### Literatūra

1. I. Kidron, Polynomias approximation of functions: historical perspective and new tools, <http://www.cc.jct.ac.il/~sifriah/reprints/kidron-ivy.pdf>.
2. *On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. ICMI study, <http://www.mathunion.org/ICMI/bulletin/43/Study.html>

### SUMMARY

**V. Dabrišienė, R.D. Šileikienė. Methodics of teaching polynomial approximation of functions in CAS environment**

A number of changes have taken place in recent years, which have influenced teaching mathematics at university level. Most important two are: we have to cope with the influx of students whose background knowledge and motivation is very low; and we have to cope with teaching of following students in CAS environment. Alas there is no many methodics based on research existing. So, we present our methodics for teaching Polynomial approximation of functions in CAS environment: concept assumptions, fragments of methodic materials and results of validation of these methods.

*Keywords:* teaching in CAS environment