



Ribinės teoremos Floydio trikampiui: naujas požiūris į nenaują uždavinį

Igoris Belovas 

Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Vilniaus universitetas

Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius

El. paštas: Igoris.Belovas@mif.vu.lt

Įteiktas 2021 balandžio 12; publikuotas 2021 gruodžio 20

Santrauka. Floydio trikampio algoritmo (ir atitinkamos kompiuterinės programos) sudarymo problema yra neretai pateikiama informatikos mokslų kryptčių studentams kaip pratimas ar pavyzdys, iliustruojantis teksto formatavimo ir ciklo konstrukcijų sąvokas. Straipsnyje siūloma pažvelgti į objektą (bei jo apibendrinimus) iš kito kampo, kaip į kombinatorinį skirstinį, ir nagrinėti jo elementų elgesį, taikant ribinių teoremų metodologiją. Iškeliama klausimai: kokiam ribiniam dėsnui paklūsta trikampio skaičiai? Koks yra konvergavimo į ribinį dėsnį greitis? Tokio tipo uždaviniai gali būti panaudoti kaip pratimai studijuojantiems matematikos ir informatikos kryptčių studijų programose esančius tikimybių teorijos ir kombinatorikos dalykus bakalaurams, padėtų studentams įvaldyti atitinkamą įrodymų techniką ir matematinį aparatą. Straipsnyje siūloma galimų uždavinių serija bei pateikiamos jų įrodymų schemas.

Raktiniai žodžiai: Floydio trikampis; ribinės teoremos; tolygūs skirstinys

AMS: 11B99, 60F05

1 Įvadas

Floydio trikampis yra formuojamas užpildant trikampio eilutes iš eilės natūraliaisiais skaičiais, pradedant vienetu viršutiniame kairiajame kampe (žr. 1 lentelę). Šio trikampio algoritmo (ir atitinkamos kompiuterinės programos) sudarymo problema yra pateikiama informatikos mokslų kryptčių studentams kaip pratimas ar pavyzdys, iliustruojantis teksto formatavimo ir ciklo konstrukcijų sąvokas [1, 6].

Kitas susijęs uždavinys studentams yra Floydio trikampio bendrojo nario $F_{n,k}$ formulės išvedimas. Pastebėjus, kad pradinio stulpelio elementai yra paslinkti per

1 lentelė. Floydio trikampis.

	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	0	0	0	0	...
1	2	3	0	0	0	0	...
2	4	5	6	0	0	0	...
3	7	8	9	10	0	0	...
4	11	12	13	14	15	0	...
5	16	17	18	19	20	21	...
...

vienetą trikampiai skaičiai, t.y., $F_{n,0} = T_n + 1$, kur

$$T_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 0, \tag{1}$$

ir kad kiekviena trikampio eilutė yra aritmetinė progresija su skirtumu 1, gauname trikampio elementų bendrą formulę,

$$F_{n,k} = \begin{cases} 0, & \text{jei } k > n, \\ T_n + k + 1, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \tag{2}$$

Tačiau į Floydio trikampį galima pažvelgti ir iš kitos pusės, kaip į *kombinatorinį skirstinį*. Tegų Ω_n yra sveikaskaitis atsitiktinis dydis su tikimybėmis $p_{n,k}$, nusakomomis formule

$$P(\Omega_n = k) = p_{n,k} := \frac{F_{n,k}}{\sum_{j=0}^n F_{n,j}}, \quad 0 \leq k \leq n. \tag{3}$$

Dabar galima nagrinėti $F_{n,k}$ elgesį, taikant ribinių teoremų metodologiją (pl. [2]). Pvz., skaičiai yra asimptotiškai normalūs su vidurkiu μ_n ir dispersija σ_n^2 , jei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x \left| \sum_{k < \mu_n + x\sigma_n} p_{n,k} - \Phi(x) \right| = 0, \tag{4}$$

kur $\Phi(x)$ yra standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. Iš tikrųjų, Floydio trikampio skaičiai nėra asimptotiškai normalūs, tačiau kokiam ribiniam dėsnii jie paklūsta? Koks yra konvergavimo į ribinį dėsnį greitis? Tokie uždaviniai Floydio trikampio apibendrinimams gali būti panaudoti kaip pratimai studijuojantiems matematikos ir informatikos kryptių studijų programose esančius tikimybių teorijos ir kombinatorikos dalykus bakalaurams.

2 Ribinės teoremos Floydo trikampio skaičiams

Sprendžiant ribinio dėsnio problemą įprastai (šabloniškai) iš pradžių apskaičiuojama Floydo trikampio skaičių generuojanti funkcija

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} F_{n,k} x^n y^k = \frac{1}{(1-y)(1-x)^3} - \frac{1}{(1-y)(1-x)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(1-y)^2(1-x)} - \frac{y}{(1-y)(1-xy)^3} - \frac{y}{(1-y)^2(1-xy)} \\ &= \frac{1 + x^4 y^2 - x^3 y - x^2 y + x^2 - x}{(1-x)^3(1-xy)^3} \end{aligned}$$

ir atsitiktinio dydžio Ω_n momentus generuojanti funkcija

$$\begin{aligned} M_n(s) &= \left(n! \sum_{k=0}^n F_{n,k} \right)^{-1} \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x, e^s) \Big|_{x=0} \\ &= \frac{(n^2 + 3n + 2)e^{s(n+2)} - (n^2 + 3n + 4)e^{s(n+1)} - (n^2 + n)e^s + (n^2 + n + 2)}{(n+1)(n^2 + 2n + 2)(1 - e^s)^2}. \end{aligned}$$

Išnagrinėję normuoto atsitiktinio dydžio $X_n = \Omega_n/n$ momentus generuojančios funkcijos $M_{X_n}(s)$ konvergavimą, gauname

$$M_{X_n}(s) = M_U(s) + O(1/n),$$

kur $M_U(s) = (e^s - 1)/s$ yra standartinio tolygaus atsitiktinio dydžio momentus generuojanti funkcija. Taigi, atsitiktinis dydis Ω_n yra asimptotiškai tolygus. Visi šie skaičiavimai užimtų keletą puslapių, tačiau, iš tikrųjų, rezultatą galima gauti trumpai ir tiesiogiai. Suformuluokime teoremą.

1 teorema. *Atsitiktinis dydis $X_n = \Omega_n/n$ asimptotiškai yra standartinis tolygusis, $X_n \sim \mathbb{U}(0, 1)$.*

Nagrinėkime iš karto bendresnį atvejį.

2.1 Natūraliųjų skaičių laipsnių trikampis

Trikampio elementų bendroji formulė yra

$$F_{n,k}^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{jei } k > n, \\ (T_n + k + 1)^s, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \quad (5)$$

Įvertinkime šio apibendrinto Floydo trikampio eilutės elementų sumą (7), pasitelkiant rezultatą natūraliųjų skaičių laipsnių sumoms (gaunamas pritaikius Eulerio-Makloreno sumavimo formulę),

$$\Psi_n^{(1)} := \sum_{k=0}^n k^s = \begin{cases} \frac{n^{s+1}}{s+1} + O(n^s), & \text{jei } s > -1, \\ \gamma + \log n + O(n^{-1}), & \text{jei } s = -1, \\ \zeta(s) + \frac{n^{s+1}}{s+1} + O(n^s), & \text{jei } s < -1, \end{cases} \quad (6)$$

čia $\zeta(s)$ yra Rymano dzeta funkcija, γ yra Eulerio–Maskeronio konstanta. Pagal (1) ir (6), turime

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=0}^n F_{n,k}^{(1)} = \Psi_{T_n+n+1}^{(1)} - \Psi_{T_n}^{(1)} = \frac{1}{2^s} n^{2s+1} + O(n^{2s}). \quad (7)$$

Normuoto atsitiktinio dydžio $X_n^{(1)} = \Omega_n^{(1)}/n$ pasiskirstymo funkcija lygi

$$\begin{aligned} F_{X_n^{(1)}}(x) &= (S_n^{(1)})^{-1} \sum_{k < nx} F_{n,k}^{(1)} = (S_n^{(1)})^{-1} (\Psi_{T_n+[nx]+1}^{(1)} - \Psi_{T_n}^{(1)}) \\ &= \frac{(n^2 + n)^s ([nx] + 1)(1 + O(n^{-1}))}{n^{2s+1}(1 + O(n^{-1}))} \\ &= \underbrace{\frac{[nx] + 1}{n}}_{\in [x, x+1/n]} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = x + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Taigi, 1 teorema galioja $F_{n,k}^{(1)}$ skaičiams. Analogiškai teorema įrodoma lyginių ir nelyginių skaičių laipsniais.

2.2 Pirminių skaičių laipsnių trikampis

Tegu $\{p_n\}$ yra pirminių skaičių seka. Atitinkamo apibendrintojo trikampio elementų formulė yra

$$F_{n,k}^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{jei } k > n, \\ (p_{T_n+k+1})^s, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \quad (8)$$

Galime įvertinti šio apibendrinto Floydio trikampio eilutės elementų sumą (12), pasi-
telkiant pirminių skaičių laipsnių sumos asimptotinę formulę [5],

$$\pi_s(t) = \sum_{p_k \leq t} p_k^s = \pi(t^{s+1}) + \begin{cases} O(t^{s+1} e^{\theta(t)}), & \text{jei } s > 0, \\ O(t^{s+1} e^{(s+1)^{3/5} \theta(t)}), & \text{jei } -1 < s < 0, \end{cases} \quad (9)$$

kur

$$\theta(t) = -0.2098(\log t)^{3/5}(\log \log t)^{-1/5}$$

ir $\pi(t)$ yra pirminių skaičių pasiskirstymo funkcija [4],

$$\pi(t) = \text{li}(t) + O(te^{\theta(t)}), \quad (10)$$

kur $\text{li}(t)$ yra integralinis logaritmas. Toliau, atsižvelgę į įvertį [3]

$$p_n = n \log n \left(1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) \right), \quad (11)$$

apskaičiuosime sumą

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=0}^n F_{n,k}^{(2)} = \pi_s(p_{T_n+n+1}) - \pi_s(p_{T_n}) = n^{2s+1}(\log n)^s \left(1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) \right) \quad (12)$$

ir normuoto atsitiktinio dydžio $X_n^{(2)} = \Omega_n^{(2)}/n$ pasiskirstymo funkciją

$$\begin{aligned} F_{X_n^{(2)}}(x) &= (S_n^{(2)})^{-1} \sum_{k < nx} F_{n,k}^{(2)} = (S_n^{(2)})^{-1} (\pi_s(p_{T_n + [nx] + 1}) - \pi_s(p_{T_n})) \\ &= \frac{[nx]}{n} + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) = x + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right). \end{aligned}$$

Taigi, 1 teorema galioja $F_{n,k}^{(2)}$ skaičiams. Kitas kelias įrodyti asimptotinių tolygumą – tai pastebėti, kad $m \leq p_m \leq m^2$, kai $m > 1$ (pl. (11)), ir pasinaudoti jau įrodytu rezultatu laipsninėms funkcijoms.

2.3 Rodyklinių funkcijų trikampis

Ar visi Floyd'o tipo trikampių skaičiai paklūsta tolygiajam dėsniiui? Nagrinėkime trikampį su elemento bendrąja formule

$$F_{n,k}^{(3)} = \begin{cases} 0, & \text{jei } k > n, \\ e^{s(T_n + k + 1)}, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \quad (13)$$

Įvertinsime trikampio eilutės elementų sumą, pasitelkiant geometrinės progresijos narių sumos formulę,

$$\Psi_n^{(3)} := \sum_{k=0}^n e^{sk} = \frac{e^{s(n+1)} - 1}{e^s - 1}. \quad (14)$$

Kai $s > 0$, turime

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=0}^n F_{n,k}^{(3)} = \Psi_{T_n + n + 1}^{(3)} - \Psi_{T_n}^{(3)} = \frac{e^{s(T_n + n + 2)} - 1}{e^s - 1} (1 - e^{-s(n+1)}). \quad (15)$$

Normuoto atsitiktinio dydžio $X_n^{(3)} = \Omega_n^{(3)}/n$ pasiskirstymo funkcija lygi

$$F_{X_n^{(3)}}(x) = (S_n^{(3)})^{-1} \sum_{k < nx} F_{n,k}^{(3)} = (S_n^{(3)})^{-1} (\Psi_{T_n + [nx] + 1}^{(3)} - \Psi_{T_n}^{(3)}) \quad (16)$$

$$= \underbrace{e^{s([nx] - n)}}_{\sim e^{-sn(1-x)}} (1 + O(e^{-sn})) \Rightarrow F_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei } x \geq 1, \\ 0, & \text{jei } x < 1, \end{cases} \quad (17)$$

čia $F_1(x)$ yra išsigimęs skirstinys. Taigi, 1 teorema negalioja $F_{n,k}^{(3)}$ skaičiams.

2.4 Uždavinių pavyzdžiai

Daugiau uždavinių apibendrintų Floyd'o trikampių skaičiams galima rasti 2 lentelėje. Visi šie skaičiai yra asimptotiškai tolygūs.

Literatūra

[1] A. Arora, S. Bansal. *Unix and C Programming*. Firewall Media, 2005.

2 lentelė. Floyd'o trikampiai.

Trikampio funkcija	Trikampio skaičiai	Pagalbinė suma $\Psi_n^{(j)}$
Logaritminė	$\log(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=1}^n \log k = n \log n - n + O(\log n)$
Sinuso kvadratas	$\sin^2(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=0}^n \sin^2 k = n/2 + O(1)$
Kosinuso kvadratas	$\cos^2(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=0}^n \cos^2 k = n/2 + O(1)$
Pagr. Dirichlé charakt.	$\chi_{0;d}(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=0}^n \chi_{0;d}(k) \sim \varphi(d) \left[\frac{n}{d} \right]$
Eulerio funkcija	$\varphi(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=1}^n \varphi(k) \sim 3n^2/\pi^2$

[2] I. Belovas. Centrinė ribinė teorema trikampių masyvų klasės skaičiams, asocijuotiems su Ermito daugianariais. *Liet. matem. rink. LMD darbai, serija B*, **61**:1–7, 2020. <https://doi.org/10.15388/LMR.2020.22466>.

[3] P. Dusard. The k th prime is greater than $k(\ln k + \ln \ln k - 1)$ for $k \geq 2$. *Math. Comput.*, **68**(225):411–415, 1999. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01037-6>.

[4] K. Ford. Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta function. *Proc. London Math. Soc.*, **85**(3):565–633, 2002. <https://doi.org/10.1112/S0024611502013655>.

[5] J. Gerard, L. Washington. Sums of powers of primes. *Ramanujan J.*, **45**:171–178, 2018. <https://doi.org/10.1007/s11139-016-9847-4>.

[6] C. Xavier. *C Language And Numerical Methods*. New Age International, 2007.

SUMMARY

Limit theorems for Floyd's triangle: a new approach to not a new problem

I. Belovas

Floyd's triangle is often presented to computer science students as an exercise or example to illustrate the concepts of text formatting and loop constructs. The paper proposes to look at an object from a different angle and to examine limit theorems for the numbers of generalized Floyd's triangles. Tasks of this type can be used as exercises in study programs of mathematics and informatics (courses of probability theory and combinatorics). It would help to master the appropriate proof techniques and mathematical apparatus. The article proposes a series of possible problems and their proof schemes.

Keywords: Floyd's triangle; limit theorems; uniform distribution