Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 60–64

Asimptotiniai skleidiniai Kubiliaus didžiųjų nuokrypių teoremoje

Rimantas SKRABUTĖNAS (VPU)
el. paštas: rimantas.skrabutenas@vpu.lt

Prof. J. Kubiliaus straipsnyje [1] įrodytos ribinės lokaliosios teoremos aritmetinėms funkcijoms pademostravo tikimybinių metodų efektyvumą aritmetinių funkcijų reikšmių pasiskirstymo teorijoje. Vėliau [2]–[4] ir kt. darbuose konstatuota, kad šios teoremos yra teisingos ir daug platesnėms adityviųjų ir multiplikatyviųjų funkcijų klasėms, o pastaraisiais metais paskelbta nemažai įdomių rezultatų apie aritmetinių funkcijų, apibrėžtų specialioje (Knopfmacherio) pusgrupėje G (jos detalų apibrėžimą žr. [2], [3]), reikšmių pasiskirstymą. Šiuose darbuose įrodytos teoremos formuluojamos panašiai kaip ir natūraliųjų skaičių pusgrupės atveju, bet rezultatai ir įrodymo būdai turi ypatumų, susijusių su specifinėmis pusgrupės G savybėmis.

Adicinė aritmetinė pusgrupė G yra laisvoji komutatyvi pusgrupė (su vienetiniu elementu), kurią generuoja skaiti pirminių elementų p aibė P. Aibėje G yra apibrėžta tokia visiškai adityvi *laipsnio funkcija* $\delta\colon G \to N \cup \{0\}$, kad $\delta(p) \geqslant 1$ su kiekvienu $p \in P$ ir galioja aksioma.

AKSIOMA. *Egzistuoja tokios konstantos* $A > 0$*,* $q > 1$ *ir* $0 \leqslant \nu < 1$*, kad*

$$G(n) := \mathrm{Card}\big\{a \in G;\ \delta(a) = n\big\} = Aq^n + \mathrm{O}(q^{\nu n}).$$

Šiame straipsnyje atkreipiame skaitytojų dėmesį į galimybę išplėsti lokaliosios didžiųjų nuokrypių teoremos aritmetinėms funkcijoms galiojimo zoną, užrašant pagrindinio nario asimptotinį skleidinį balno taško aplinkoje.

Tirsime aritmetinių funkcijų $g\colon G \to C$, tenkinančių tokias lokalaus pasiskirstymo pusgrupės G pirminių elementų aibėje P sąlygas: *su visais galimais* $\nu \in C$

$$\sum_{p\in P,\ \delta(p)=l,\ g(p)=\nu} 1 = \pi(l)(\lambda_\nu + \rho_\nu(l)), \quad l \geqslant 1, \quad \pi(l) = \sum_{p\in G,\ \delta(p)=l} 1. \qquad (1)$$

Čia $\lambda_\nu \in [0,1]$ – konstantos, o $\rho_\nu(l)$ – liekamieji nariai. Dėl paprastumo tarsime, kad $\rho_\nu(l) =: C_\nu(l)l^{-\alpha}$ su konstanta $\alpha > 0$ ir (tolygiai su visais $l \geqslant 1$) konverguojančia eilute $\sum_\nu |C_\nu(l)|$. Net ir didžiųjų nuokrypių teoremose funkcijų $\rho_\nu(l)$ tenkinamas nykstamo mažėjimo sąlygas galima labai susilpninti. Tačiau tos sąlygos, žinoma, sąlygoja, įrodytų teoremų galiojimo zonos dydį.

Tokių aritmetinių funkcijų aibę žymėsime $M(G)$. Naudosime įprastinius žymėjimus:

$$E := \sum_\nu \nu\lambda_\nu, \quad \sigma^2 := \sum_\nu \nu^2\lambda_\nu, \quad \lambda := \sqrt{\log n},$$

$$\nu_n(m) := \frac{1}{Aq^n}\mathrm{Card}\{a \in G,\ \delta(a) = n,\ f(a) = m\}.$$

Visų tipų lokaliosiose teoremose pagrindiniame naryje atsiranda vadinamasis *papildomas daugiklis* $H(g)$, kurio detalų aprašymą galima rasti jau minėtuose straipsniuose [2], [3] ir kuris klasikinėse Kubiliaus teoremose yra tiesiog lygus vienetui. Adityviosioms funkcijoms $f\colon G \to Z$ [3] darbe gautas toks rezultatas.

1 TEOREMA. *Jei adityvioji funkcija $f\colon G \to Z$ priklauso klasei $M(G)$ ir egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad eilutės*

$$\sum_\nu e^{c|\nu|}\lambda_\nu, \qquad \sum_{p,j\geqslant 2} q^{-j\delta(p)}e^{c|f(p^j)|}, \qquad \sum_\nu e^{c|\nu|}|C_\nu(l)| \tag{2}$$

konverguoja (pastaroji tolygiai atžvilgiu l, $l \geqslant 1$), tai su bet kokiu sveikuoju $m = E\lambda^2 + o(\lambda^2)$, kai $\sigma > 0$,

$$\nu_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\lambda}H(f)n^{A(\xi_0)}\left(1 + O\left(|\xi_0| + \frac{\log^2\lambda}{\lambda^2}\right)\right) + O(n^{-\beta}).$$

Čia $\beta = \beta(\alpha)$ yra teigiama konstanta,

$$\xi := \frac{m}{\lambda^2} - E, \qquad A(\xi_0) := \sum_l (1+\xi_0)^l\lambda_l - 1 - (E+\xi)\ln(1+\xi_0),$$

ir ξ_0 yra vienintelis lygties

$$\sum_l ((1+x)^l - 1)l\lambda_l = \xi$$

sprendinys intervale $(0, \frac{2\xi}{\sigma^2})$. Be to, $\xi_0 \to 0$, kai $n \to \infty$.

Savo ruožtu [4] darbe Kubiliaus teoremos analogas įrodytas multiplikatyviosioms funkcijoms g iš klasės $M(G)$.

Iš pradžių primename svarbesnius žymenis:

$$\chi_k = \chi_k(t) = \sum_{\nu,\nu\neq 0}\lambda_\nu|\nu|^{it}\mathrm{sgn}^k\nu, \quad E_{kj} = \sum_{\nu,\nu\neq 0}\lambda_\nu|\nu|^{it}\mathrm{sgn}^k\nu\log^j|\nu|,$$

$$\gamma_k = \sum_{\nu,\nu\neq 0}\lambda_\nu\mathrm{sgn}^k\nu, \quad \sigma_k^2 = \sum_{\nu,\nu\neq 0}\lambda_\nu sgn^k\nu\log^j|\nu|,$$

$$\eta_k(t) = \sum_{\nu,\nu\neq 0}\lambda_\nu\mathrm{sgn}^k\nu\cos(t\log|\nu|).$$

2 TEOREMA. *Tarkime $g \in M(G), \sigma_0^2 > 0$, o funkcija $\log|g(a)|$ su visais $a \in G$ tokiais, kad $g(a) \neq 0$, įgija tik sveikąsias reikšmes ir tenkina (2) sąlygą. Tada, jei $\log|m| = (E_{01} + \mathrm{o}(1))\log n$, tai, kai $n \to \infty$, yra teisinga asimptotinė formulė*

$$\nu_n(m) = \sum_{k=0}^{1} \frac{\mathrm{sgn}^k m}{2n^{1-\gamma_0}} H_k(g, G) \exp\left\{\lambda^2 A(\xi_0)\right\}\left(1 + \mathrm{O}\left(|\xi_0| + \frac{\log^2\lambda}{\lambda^2}\right)\right) + \mathrm{O}(n^{-\beta}).$$

Čia $\beta = \beta(\alpha) > 0$ yra konstanta, $\xi := \frac{\log|m|}{\lambda^2} - E_{01}$,

$$A(\xi_0) := \gamma(\xi_0) - \gamma_0 - (E_{01} + \xi)\ln(1 + \xi_0), \quad \gamma(\xi_0) := \sum_{\nu, \nu \neq 0} (1 + \xi_0)^{\log|\nu|}\lambda_\nu,$$

o ξ_0 yra vienintelis lygties

$$\sum_{\nu, \nu \neq 0} \left((1 + x)^{\log|\nu|} - 1\right)\log(\nu)\lambda_\nu = \xi$$

sprendinys intervale $(0, \frac{2\xi}{\sigma^2})$ ir $\xi_0 \to 0$. $H_k(g, G)$ yra minėtasis papildomas daugiklis. Multiplikatyviųjų funkcijų atveju jį sudaro du pagrindiniai dėmenys, atitinkantys Mellin'o transformacijas ir lygčių $\eta_0(t) = \gamma_0$, $\eta_1(\tau) = -\gamma_1$ sprendinius t_0, τ_0.

Pastebime, kad abiem atvejais pagrindinis narys išskiriamas balno taško, kuris yra vienintelis standartinės lygties sprendinys, aplinkoje. Rezultatai iš esmės skiriasi tik papildomo daugiklio išraiška. Tačiau abiejų teoremų netrivialumo zona yra gana siaura ir ypač dėl to, kad liekamajame naryje išskirtas dėmuo $\mathrm{O}(|\xi_0| + \frac{\log\lambda}{\lambda^2})$, apie kurį žinoma tik tiek, kad jis konverguoja į nulį, kai $n \to \infty$.

Darbe [5] anonsuota, kad natūraliųjų skaičių pusgrupės N atveju visus nuo sprendinio ξ_0 priklausančius pagrindinio nario daugiklius abiejose teoremose galima išskleisti eilute ξ_0 laipsniais ir taip patikslinti liekamuosius narius, taigi ir jų galiojimo zonas.

Dabar 1 ir 2 teoremos formuluojamos taip:

3 TEOREMA. *Jei adityvioji funkcija $f: G \to Z$ priklauso klasei $M(G)$ ir tenkinama (2) sąlyga, tai su bet kokiais sveikuoju $m = E\lambda^2 + \mathrm{o}(\lambda^2)$ ir fiksuotu $r \in N$*

$$\nu_n(m) = \frac{n^{A(\xi_0)}}{\sqrt{2\pi}\sigma\lambda}\left(\sum_{j=0}^{r-1} d_j(f)\xi_0^j + \mathrm{O}\left(|\xi_0|^r + \frac{\log^2\lambda}{\lambda^2}\right)\right) + \mathrm{O}(n^{-\beta}).$$

Koeficientai $d_j(f)$ priklauso tik nuo funkcijos f. Be to, $d_0(f) = H(f)$.

4 TEOREMA. *Jei multiplikatyvioji funkcija $g \in M(G)$, $\sigma_0^2 > 0$ ir tenkinamos 2 teoremos sąlygos, tai, kai $\log|m| = (E_{01} + \mathrm{o}(1))\log n$, su bet kokiu fiksuotu $r \in N$ yra teisinga asimptotinė formulė*

$$\nu_n(m) = \sum_{k=0}^{1} \frac{\mathrm{sgn}^k m}{2n^{1-\gamma_0}} \exp\left\{\lambda^2 A(\xi_0)\right\}\left(\sum_{j=0}^{r-1} h_{kj}(g)\xi_0^j + \mathrm{O}\left(|\xi_0|^r + \frac{\log^2\lambda}{\lambda^2}\right)\right) + \mathrm{O}(n^{-\beta}),$$

ir koeficientai $h_{kj}(g)$ priklauso tik nuo funkcijos g. Be to, $h_{k0} = H_k(g, G)$.

Keli svarbesni 4 teoremos įrodymo momentai.

LEMA. *Funkcijos*

$$u_1(x) := \sum_l \big((1+x)^l - 1\big) l\lambda_l - \xi, \quad u_2(x) := \sum_{\nu, \nu \neq 0} \big((1+x)^{\log|\nu|} - 1\big) \log|\nu| \lambda_\nu - \xi,$$

taško $x = 0$ *aplinkoje yra tolydžios ir turi joje vienintelį nulio tašką* ξ_0.

Lemos įrodymo idėja tokia pati, kaip ir [2] bei [3] darbuose.

Išvada. Funkcijas $u_1(x)$ ir $u_2(x)$ galima išskleisti ξ_0 laipsniais pavidalu:

$$u_k(x) := \sum_{j=l}^{r-1} a_{kj} \xi_0^j + \mathrm{O}\big(|\xi_0|^r\big), \quad k = 1, 2.$$

Skleisdami Gamma-funkciją, naudosimės tapatybe

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \mathrm{e}^{C(z-1)} \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z-1}{k}\Big) \exp\Big\{ -\frac{z-1}{k} \Big\}.$$

Sąlyga (2) leidžia tvirtinti:

$$\Gamma^{-1}\big(\chi_0(t, \xi_0)\big) = \Gamma^{-1}\big(\gamma(\xi_0)\big) \Bigg(\sum_{j=0}^{r-1} b_j \xi_0^j + b_1(\xi_0)(it) + \mathrm{O}\big(|\xi_0|^r + |t|^2\big) \Bigg),$$

$$\chi_0(t, \xi_0) := \sum_{\nu, \nu \neq 0} (1+\xi_0)^{\log|\nu|} \mathrm{e}^{it \log|\nu|} \lambda_\nu = \sum_{j=0}^{r-1} c_j \xi_0^j + d_1(\xi_0)(it) + \mathrm{O}\big(|\xi_0|^r + |t|^2\big),$$

$$A^{\chi_0(t, \xi_0) - 1} = \sum_{j=0}^{r-1} a_j \xi_0^j + a_1(\xi_0)(it) + \mathrm{O}\big(|\xi_0|^r + |t|^2\big).$$

Čia $b_j, \ c_j, \ a_j, \ b_1(\xi_0), \ d_1(\xi_0)$ yra koeficientai. Be to, $b_0 = 1, \ c_0 = \gamma(\xi_0)$,

$$a_0 = A^{\gamma(\xi_0) - 1}, \quad d_1(\xi_0) = \sum_{\nu, \nu \neq 0} \lambda_\nu ((1+\xi_0)^{\log|\nu|} \log|\nu|.$$

Panašiai išskleidžiamos ir kitos pointegralinės funkcijos standartinėje dažnio $\nu_n(m)$ išraiškoje integralu:

$$\nu_n(m) = \frac{1}{4\pi A q^n} \sum_k \mathrm{sgn}^k m \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-it \log|m|} \sum_{\delta(a)=n} f_k(a, t, 0) \mathrm{d}t.$$

Čia $f_k(a, t, u) := |g(a)|^{\log(1+u)+it} \mathrm{sgn}^k g(a)$. Pavyzdžiui,

$$h_{01}(t + t_0, \xi_0) := \prod_{p \in P} \Big(1 - \frac{1}{\|p\|}\Big)^{\chi_0(t, \xi_0)} \sum_{j \geqslant 0, \ g(p^j) \neq 0} \frac{f_1(p^j, t_0, \xi_0)}{\|p\|^j}$$

$$= \prod_{p\in P}\Big(1-\frac{1}{\|p\|}\Big)^{\gamma(\xi_0)} \sum_{j\geqslant 0,\ g(p^j)\neq 0} \frac{f_1(p^j, t+t_0, \xi_0)}{\|p\|^j}$$

$$+\sum_{j=1}^{r-1} u_{kj}\xi_0^j + h^*(\xi_0)(it) + \mathrm{O}\big(|\xi_0|^r + |t|^2\big),$$

todėl ir

$$L_{01}(t+t_0,\xi_0) = \frac{A^{\chi_0(t,\xi_0)-1}}{\Gamma(\chi_0(t,\xi_0))} h_{01}(t+t_0,\xi_0)$$

$$= A^{\gamma(\xi_0)-1} H_1^*(f_k,\xi_0) + \sum_{j=1}^{r-1} \nu_{kj}\xi_0^j + L_{01}(t_0,\xi_0)(it) + \mathrm{O}\big(|\xi_0|^r + |t|^2\big);$$

čia koeficientai u_{kj}, ν_{kj}, $h^*(\xi_0)$, $L_{01}(t_0,\xi_0)$ priklauso nuo funkcijos g. Kaip ir [4] darbe,

$$H_1^*(f_k,\xi_0) = \frac{1}{\Gamma(\gamma(\xi_0))} \sum_{t_0} \mathrm{e}^{-it_0 \log|m|} \prod_{p\ni P} \Big(1-\frac{1}{\|p\|}\Big)^{\gamma(\xi_0)} \sum_{j\geqslant 0,\ g(p^j)\neq 0} \frac{f_k(p^j, t_0, \xi_0)}{\|p\|^j}.$$

Šie įverčiai ir leidžia standartiniu metodu gauti pateiktas 3 ir 4 teoremose asimptotines formules.

Literatūra

1. J. Kubilius, On local theorems for number-theoretic functions, in: *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis*, Zur Errinerung an E. Landau (*1877–1938*), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1968), pp. 175–191.
2. E. Manstavičius, R. Skrabutėnas, *Local Distributions of Additive Functions on Arithmetical Semigroups*, Preprint 95–11, Vilnius University (1995).
3. R. Skrabutėnas, Local distributions of arithmetic functions on semigroups, in: A. Laurinčikas *et al.* (Eds.), *Analytic and Probabilistic Number Theory, New Trends in Probab. and Statist.*, TEV, Vilnius/VSP, Utrecht (1997), pp. 363–370.
4. R. Skrabutėnas, Ribinė didžiųjų nuokrypių lokalioji teorema multiplikatyviosioms funkcijoms, *Liet. matem. rink.*, 41(spec. nr.), 113–118 (2001).
5. 5. R. Skrabutėnas, A. Našlėnas, Pastaba apie vieną J. Kubiliaus teoremą, LMD XXXIX konferencijos darbai, 27–28 (1998).

SUMMARY

R. Skrabutėnas. Asymptotical expansions in the Kubilius theorem of large deviations

In the present paper, a local theorem of large deviations for arithmetic functions defined in Knopfmacher's semigroup is obtained.

Keywords: arithmetic function, asymptotic behaviour of mean values, local distributions, large deviations, asymptotical expansions.