Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.*, 2007, 442–447

Matematinių modelių taikymas akcijų rinkos analizėje

Svetlana DANILENKO (VGTU)
el. paštas: svetlana.danilenko@fm.vgtu.lt

Reziumė. Darbe akcijų kintamumas modeliuojamas naudojant dispersiją, EWMA ir GARCH modelius. Rezultatai pateikiami panaudojant Lietuvos OMXV indekso logaritmuotas grąžas.

1. Įvadas

Finansų literatūroje rizika paprastai matuojama aktyvų kainų pokyčiais. Egzistuoja nemažai matematinių modelių, aprašančių vertybinių popierių kainų dinamiką. Tokių modelių kūrimo problema traukia ir dar ilgai trauks dėmesį daugelio matematikų. Finansų rinkoje cirkuliuoja didžiuliai pinigų srautai, todėl vertybinių popierių kainų dinamikos analizė tampa ypač aktuali.

Praktikoje pirmenybė teikiama aktyvų grąžoms, o ne jų pradinėms kainoms. Santykinės ir logaritmuotos grąžos (skirtingai nuo absoliučių aktyvų kainų pokyčių) rodo pokytį lyginant su tam tikru užduotu lygiu.

Šiuolaikinį vertybinių popierių portfelį gali sudaryti daugelis aktyvų. Šio portfelio rizika priklauso nuo įvairių įvykių, kurie gali įvykti su tam tikra tikimybe. Paskutiniu metu vis didesnį populiarumą aktyvų rizikos vertinime įgyja modeliai, kurie aprašo aktyvų kintamumą (angl. *volatility*). Aktyvų kintamumas vaidina didelį vaidmenį finansų rinkoje visame pasaulyje, todėl yra svarbus kintamumo tikslingas modeliavimas. Egzistuoja daug įvairių metodų, kurie įvertina aktyvų kintamumą. Keletas metodų aprašyti šiame darbe.

2. Aktyvų grąža ir kintamumas

Kainų pokyčiai dažnai naudojami rizikai matuoti. Egzistuoja keli pokyčių skaičiavimo variantai. Tarp jų *absoliutus*, *santykinis* ir *logaritmuotas* kainų pokyčiai.

Pažymėkime P_t – aktyvo kaina t momentu. Tada absoliutus aktyvo kainos pokytis per vieną dieną:

$$D_t = P_t - P_{t-1}. \tag{1}$$

Absoliutūs pokyčiai retai naudojami finansų rinkoje, pirmenybė teikiama santykiniam ir logaritmuotam pokyčiams, kurie rodo aktyvo grąžą.

Santykinis aktyvo kainos pokytis arba grąža tam pačiam periodui:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \tag{2}$$

Aktyvo kainos pokyčio logaritmas r_t:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right). \tag{3}$$

Lyginant R_t ir r_t rodiklius pastebima, kad logaritmuotų grąžų grafikas lygesnis ir jo pokyčiai turi mažesnę amplitudę.

Darbe bus naudojamas logaritmuotas aktyvo pokytis.

Nei viena sąvoka finansų matematikoje neturi tiek prieštaringų sąvokų kaip kintamumas. Bendro apibrėžimo šiam terminui nėra. Pats terminas naudojamas įvairių matų pokyčiams vadinti [1]. Gali būti apibrėžiamas kaip pajamų neapibrėžtumo matas, kuris realizuojamas tam tikrame aktyve [2]. Artimesnis finansų rinkai pateikiamas kintamumo apibrėžimas `wikipedia.org` tinklapyje: aktyvo kintamumas – tai finansinio instrumento kainos pokyčio standartinis nuokrypis užduoto laikotarpio rėmuose.

Taigi aktyvo kintamumas yra atsitiktinis dydis arba, nagrinėjant aktyvų kainų pokyčius per kelis intervalus, laiko eilutė. Šio rodiklio modeliavimas sudaro pagrindą rinkos rizikoms vertinti.

3. Aktyvų kintamumo modeliavimas

Standartiškai kintamumas vertinamas naudojant dispersijos rodiklį. Naudojami m stebėjimai atžvilgiu r_t:

$$\sigma_t^2(m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(r_{t-i} - \overline{r})^2, \tag{4}$$

kur

$$\overline{r} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_{t-i}. \tag{5}$$

RiskMetrics (1996) pasiūlė eksponentinio išlyginimo modelį [3] (angl. *Exponentially Weighted Moving Average – EWMA)*:

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2, \tag{6}$$

kur $0 < \lambda < 1$.

Pasikartojantis pakeitimas rodikliui σ_{t-1}^2:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}r_{t-1}^2 + \lambda^m\sigma_{t-m}^2. \tag{7}$$

Metodologijoje siūloma naudoti $\lambda = 0.94$ dieniniams stebėjimams ir $\lambda = 0.97$ mėnesiniams stebėjimams.

Naudojant šį metodą atsižvelgiama į visus ankstesniuosius stebėjimus, be to senesniems stebėjimams priskiriami eksponentiškai mažėjantys svoriai. Svoriai priskiriami naudojant „išlyginimo konstanta“ λ: kuo ji artimesnė vienetui, tuo didesnis svoris atiteks senesniems stebėjimams ir tuo lygesnė bus laiko eilutė. Kintamumas vertinamas EWMA modelio pagalba greitai reaguoja į staigius kursų pokyčius, nes neseni įvykiai turi didesnį svorį, negu įvykusieji praeityje. Iš kitos pusės sureagavus į staigius pokyčius, toliau šio įvykio svarba krenta tuo stipriau, kuo daugiau praeina laiko. Lyginant pirmus dvejus aprašytus metodus pastebima, kad naudojant EWMA modelį kintamumas perverčiamas daug greičiau.

Engelio (1982) ir Bolerslevo (1986) sukurti GARCH šeimos modeliai (angl. G*eneralized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity – GARCH)* plačiai naudojami finansų rinkoje [4, 5]. EWMA modelis yra GARCH modelio atskiras atvejis.

Paprasčiausias ir dažniausiai naudojamas GARCH (1,1) modelis. Šio modelio, vertinančio dispersijos kintamumą, išraiška:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_1 r_{t-1}^2, \tag{8}$$

kur α_0, α_1 ir β_1 vertinami parametrai. Parametrų apribojimai: $\alpha_0 > 0$; $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Pasikartojantis pakeitimas rodikliui σ_{t-1}^2:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 + \alpha_1^2\alpha_0 + \cdots + \beta_1 r_{t-1}^2 + \beta_1\alpha_1 r_{t-2}^2 + \beta_1\alpha_1^2 r_{t-3}^2 + \cdots + \beta_1^m \sigma_{t-m}^2. \tag{9}$$

Kai $\alpha_0 = 0$ ir $\beta_1 = 1 - \alpha_1$ GARCH modelis paverčiamas EWMA modeliu.

4. Rezultatai

OMX Vilnius indeksas – tai visų akcijų indeksas, kurį sudaro visos Vilniaus VP biržos Oficialiajame ir Papildomajame sąraše kotiruojamos bendrovės, išskyrus tas bendroves, kuriose vienas akcininkas valdo 90 proc. ir daugiau išleistų akcijų. Indeksu siekiama atspindėti Vilniaus vertybinių popierių rinkos einamąją padėtį ir jos pokyčius. OMXV indekso bazinė data yra 1999 m. gruodžio 31 d., o bazinė reikšmė – 100 punktų [6].

Nagrinėjamos OMXV akcijos 1619 dienų laiko intervale (nuo 2000.01.01. iki 2006.12.31). Akcijų grąžos apskaičiuotos pagal logaritmuotus pokyčius. 1 pav. pateikta OMXV akcijų dinamika (a), logaritmuotos grąžos (b) ir sumodeliuotas kintamumas dviem metodais (naudojant dispersiją ir EWMA) (c).

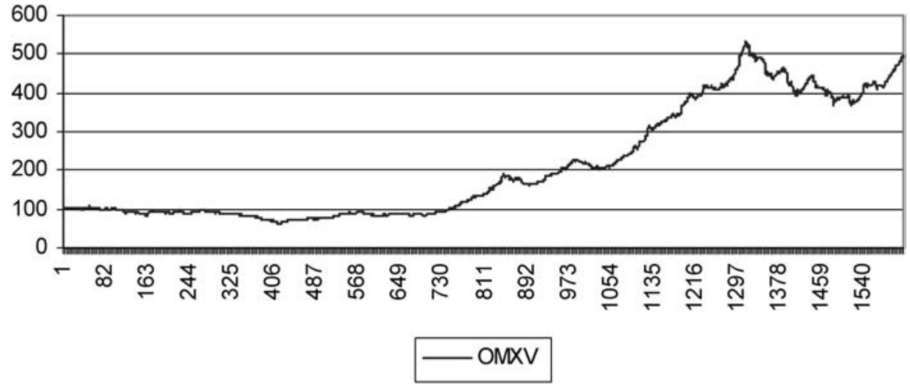
Šių dvejų metodų priklausomumas pateiktas 2 pav. Iš pateikto grafiko matoma, kad per nagrinėjamą periodą dažniausiai pastebėtas kintamumas buvo iki 2 procentų naudojant abu metodus. Šių metodų kintamumo vertinimas yra labai panašus. Bet nagrinėjant retus didesnius kintamumus matoma, kad modelių vertinimai labiau skiriasi.

Vertinant GARCH modelio parametrus, buvo gautas modelis:

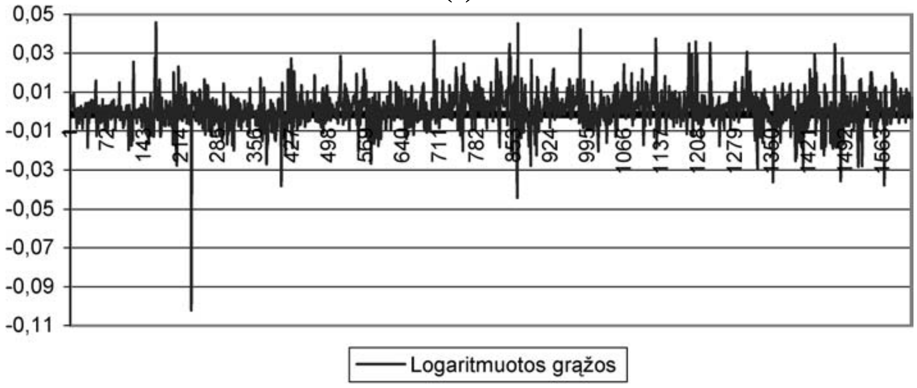
$$\sigma_t^2 = 0.377309 + 0.416798\sigma_{t-1}^2 + 0.165529 r_{t-1}^2.$$

Jo grafinė išraiška pateikta 3 pav.

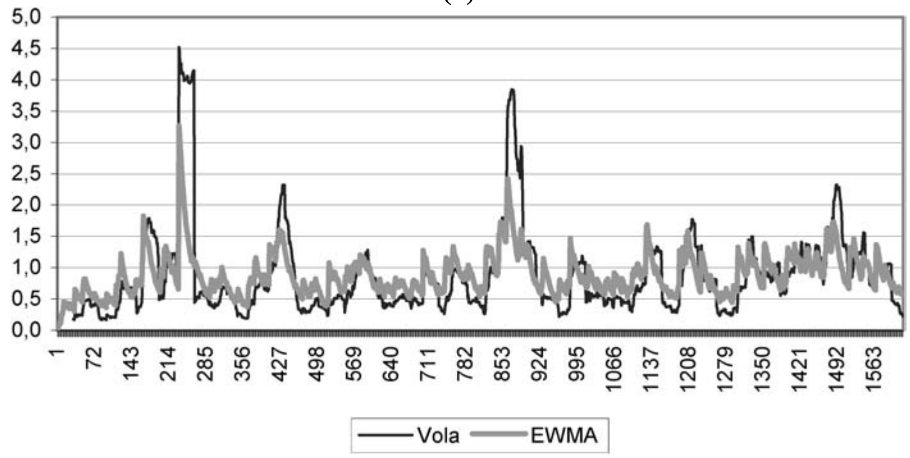
Parametras $\alpha_0 = 0.377$ rodo vidutinio kintamumo prognozę, į kurį konverguoja GARCH procesas. Kuo α_1 koeficientas yra didesnis, tuo ilgesnis kintamumo gęstamumo periodas (t.y. tuo „pastovesnis“ kintamumas). Iš koeficiento $\alpha_1 = 0,417$ negalima sakyti, kad nagrinėjamų akcijų kintamumas pastovus. Kuo didesnis koeficientas β_1, tuo greičiau kintamumas reaguoja į rinkos pokyčius. Koeficientas $\beta_1 = 0,166$ rodo, kad kintamumas nelabai greitai reaguoja į šuolius.



(a)

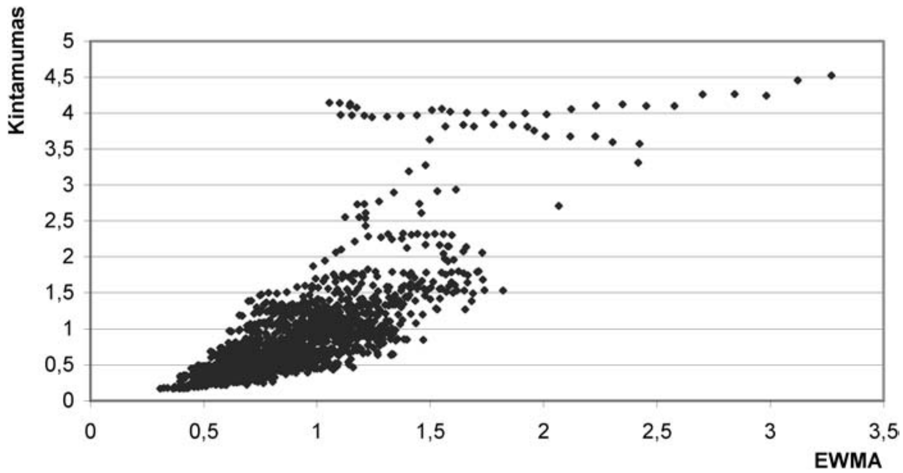


(b)

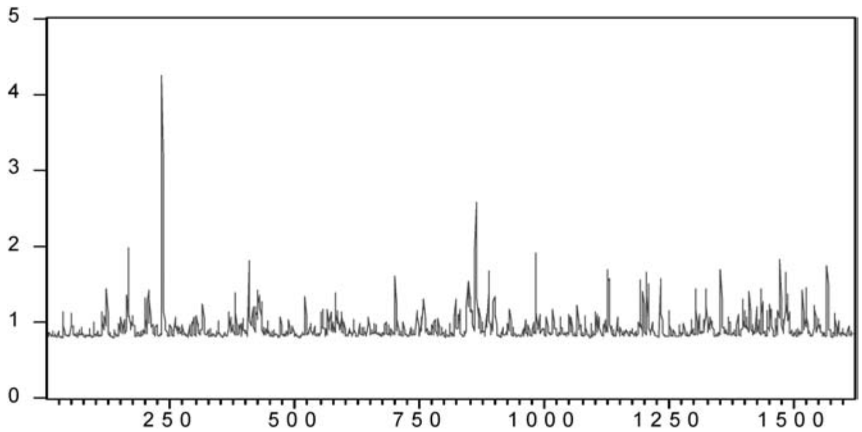


(c)

1 pav. OMXV akcijų grąžų modeliavimas.



2 pav. Metodų priklausomybės tyrimas.



3 pav. GARCH (1,1) modelis OMXV logaritmuotoms grąžoms.

5. Išvados

Kintamumo modeliavimas yra svarbi finansų rinkos tyrimo sritis. Darbe aprašyti metodai buvo panaudoti OMXV indekso kintamumui modeliuoti. Kiekvienas iš pateiktų metodų yra geras esant tam tikrai situacijai. Dispersijos naudojimas kintamumui vertinti tinkamas kai akcijų kainos neturi staigių šuolių. Eksponentinio išlyginimo metodas greičiau reaguoja į pokyčius ir neturi ilgos atminties, todėl tinkamas akcijoms, kurioms būdingi staigūs šuoliai. GARCH modeliai reikalingi stochastinių procesų vertinimui, kur sąlyginis pasiskirstymas kintamas kiekvienu laiko momentu.

Literatūra

1. А.Н. Ширяев, *Основы стохастической математики*, т. 1, Фазис, Москва (1998).
2. J.C. Hull, *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Prentice-Hall, New Jersey (2003).
3. J.P. Morgan, *RiskMetrics Technical Document*, 4th edition, New York (1996).
4. R.F. Engle, Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1007 (1982).
5. T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **21**, 307–328 (1986).
6. `http://www.baltic.omxgroup.com/?id=382290`.

SUMMARY

S. Danilenko. Application of mathematical models in stock market analysis

This paper describes several methods for modulating of the stocks volatility through use of variance, EWMA and GARCH models. Results are presented using logarithmic return of the Lithuanian OMXV index.

Keywords: volatility, exponentially weighted moving average, GARCH.