

Skaičių teorija mokyklinėje matematikoje

Eugenijus STANKUS (VU)

el. paštas: eugenijus.stankus@mif.vu.lt

Skaičių teorija pelnytai vadinama seniausia matematikos šaka. Matematikos žinių ir išgūdžių formavimas neatsiejamas nuo skaičiaus sąvokos ir tuo pačiu nuo skaičių teorijos kai kurių teiginių išsivystymo. Straipsnyje analizuojamas skaičių teorijos „paplitimas“ mokyklinėje matematikoje atkreipiant dėmesį į pačios skaičiaus sąvokos filosofinius aspektus. Mus žavi skaičių teorijos teiginių formuluočių paprastumas, tačiau gana sudėtinga tokių teiginių įrodymo technika. Straipsnyje demonstruojama, kaip nesunku nuo mokyklinių uždavinių, netgi neįvedant naujų sąvokų, pereiti prie sudėtingesnių uždavinių, galinčių sudominti gabesnius mokinius. Tokie uždaviniai populiarūs matematikos olimpiadose ir konkursuose. Didelę mokyklinės matematikos kurso dalį, ypač pradinio ir pagrindinio ugdymo, iš tikrųjų sudaro skaičių teorijos elementai. Tuo nesunkiai išsitikinsime peržvelgę matematikos programą [1].

Jau I–II klasės programoje – teigiamieji skaičiai ir veiksmas su jais. Čia supažindinama su skaičių iki 100 skaitymu ir užrašymu, lyginiais ir nelyginiais skaičiais, dviženklį skaičių sudėtimi ir atimtimi. III–IV klasės – teigiamieji skaičiai ir veiksmas su jais: skaičių iki 10000 skaitymas ir užrašymas, paprastųjų trupmenų su vardikliais 1, ..., 9, 10, 100 užrašymas, sveikųjų neneigiamų skaičių iki 10000 sudėtis ir atimtis, daugiaženklį skaičių daugyba iš vienaženklį skaičiaus, natūraliųjų skaičių dalyba be liekanos ir su liekana iš vienženklį ir dviženklį skaičiaus. V–VI klasės – skaičiai ir skaičiavimai, natūralieji skaičiai, trupmeniniai skaičiai, procentai. VII–VIII klasės – teigiamieji ir neigiamieji skaičiai, skaičius, atvirkštinis skaičiui n , kvadratinės šaknys, standartinė skaičiaus išraiška ir kt. IX–X klasėse šios visos sąvokos giliamos, programoje yra net atskiras skaičių teorijos elementų skyrelis. Pagrindinio ugdymo išsilavinimo standartuose akcentuojama, kad mokinys turi gebėti paprastais atvejais taikyti skaičių teorijos elementus (pavyzdžiui, bendrą daliklį ir kartotinį, skaičių dalumo požymius).

Bendrosiose programose ir išsilavinimo standartuose XI–XII klasėms [2] rasime šias su skaičių teorija susijusias temas. Skaičių aibės (bendrųjų žinių apie natūraliuosius, racionaliuosius, iracionaliuosius, realiuosius skaičius, skaičių intervalų sisteminimas), aibių sąjunga ir sankirta. Skaičiaus modulio sąvoka. Bendrųjų žinių apie realiųjų skaičių ir tiesės taškų atitiktį sisteminimas. Specialiųjų moksleivių gebėjimų sąrašas: teisingai vartoja sąvokas natūralieji, sveikieji, racionalieji, iracionalieji, realieji skaičiai, paaiškina realiųjų skaičių aibės sandarą, suvokia, kad tarp tiesės taškų ir realiųjų skaičių aibės egzistuoja abipusė vienareikšmė atitiktis, paverčia dešimtaines periodines trupmenas paprastosiomis.

Brandos egzaminų programoje [3] skaičių teorijos elementai pateikti atskira pas-traipa. Valstybinio egzamino reikalavimuose tarp visų kitų išvardinti ir šie: nesudėtingais atvejais rasti dviejų skaičių mažiausią bendrąją kartotinę ir didžiausią bendrąją daliklį; paaiškinti sąvoką *pirminis skaičius* ir mokėti išskaidyti sudėtinį skaičių pirminiais dauginamaisiais; žinoti dalumo iš 2, 3, 5, 9 ir 10 požymius ir mokėti juos taikyti uždaviniams spręsti; paaiškinti ir sprendžiant uždavinius gebėti naudotis sąvokomis – natūralieji, sveikieji, racionalieji, iracionalieji, realieji skaičiai, paprastosios trupmenos, standartinis skaičiaus pavidalas; paprastais atvejais rasti skaičių aibių sąjungą, sankirtą, skirtumą.

Bendrosios matematikos programos pagrindinei mokyklai projekte (V. Sičiūnienė ir kt.) skaičių teorijos elementams skiriama taip pat nemažai vietos. IX–X klasių mokiniai turėtų mokėti perskaityti, užrašyti, susieti tarpusavyje ir palyginti realiuosius skaičius, taikyti apytikslio skaičiavimo ir skaičių apvalinimo taisykles nesudėtingų uždavinių sprendimui, atlikti aritmetinius veiksmus su realiaisiais skaičiais, pasirinkti tinkamą veiksmą ir skaičiavimo būdą nesudėtingiems įvairaus turinio uždaviniams spręsti, numatyti, įvertinti ir pasitikrinti skaičiavimo rezultatus, nesudėtingais atvejais taikyti dalumo požymius, sąvokas: priešingas, atvirkštinis, lyginis (nelyginis), modulis, dviejų skaičių (didžiausias) bendras daliklis ar (mažiausias) bendras kartotinis, skaičiaus dalis, procentas.

Ši mokyklinių programų apžvalga leidžia teigti, kad mokinių matematinis lavinimas pradedamas nuo skaičiaus sąvokos, kuri per visą mokymosi vidurinėje (o ir aukštojoje) mokykloje išlieka labai svarbi studijuojant matematiką ir jos taikymą. Taigi kas tai yra skaičius? Ar būtų skaičiai, jei nebūtų matematikų? Atsakyti į šiuos klausimus nėra lengva, nes matematinės sąvokos, apskritai, nėra materialūs objektai. Aristotelis teigė, kad matematinės sąvokos kuriamos atsiribojant nuo objektų savybių. Natūraliojo skaičiaus sąvoka ne išimtis – natūralusis skaičius žymi objektų kiekį, nesvarbu kokios prigimties šie objektai bebūtų. Todėl vaikas, norėdamas suvokti, kas yra natūralusis skaičius, turi gebėti pakankamai abstrakčiai mąstyti. Ne mažiau sudėtinga įvesti sveikuosius neigiamus skaičius. Tam tinka visokiausios interpretacijos – ir temperatūra, ir skolos didumas, ir aukštis bei gylis pasaulio vandenyno lygio atžvilgiu ir pan. Ne vienam mokiniui kyla problemų suvokiant ir užrašant racionaliuosius ir iracionaliuosius skaičius bei vaizduojant juos realiųjų skaičių tiesėje. Įdomūs iracionaliųjų skaičių aproksimavimo paprastosiomis trupmenomis uždaviniai. Taip pat ne viename tekstiniame uždavinyje susiduriame su sprendinių sveikaisiais skaičiais suradimu, t. y. su diofantinių lygčių sprendimu. Visi šie klausimai faktiškai yra skaičių teorijos objektas ir nusipelno dėmesio. Dalumo tema buvo gvildenta Lietuvos jaunųjų matematikų mokykloje 2000 m. [4] ir 2004 m. [5], o diofantinės lygtys – 2006 m. (www.mif.vu.lt/ljmm/).

Taigi skaičių teorijos elementų vidurinės mokyklos matematikos kurse gana apstu. Vadinasi, ir mokytojų skaičių teorijos žinios turėtų būti pakankamo lygio. Tam nemažai dėmesio skiriama Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos mokymo studijų programoje, kurios absolventams suteikiamas matematikos bakalauro laipsnis bei mokytojo kvalifikacija. Vienas iš kursų, kurio išklauso šios studijų programos studentai, yra matematikos metodikos kursas *Stochastika ir skaičių teorija mokyklinėje matematikoje*. Šiame kurse gvildenamos tikimybių teorijos ir skaičių teorijos dėstymo problemos. Kurso skaičių teorijos dalyje nagrinėjamos tokios temos:

skaičių teorijos elementų mokyklinėje matematikoje apžvalga; sveikųjų skaičių dalumas; realiųjų skaičių aproksimavimas racionaliaisiais; Pitagoro uždavinys; egzotiškos natūraliųjų skaičių savybės (tobulieji, draugiškieji, Merseno, Ferma skaičiai); magiškieji kvadratai.

Šiek tiek apsistosime ties sveikųjų skaičių dalumo tema, kuri mokyklinėje matematikoje ypač populiaru, o ir uždaviniai, susiję su dalumu, yra gana įdomūs. Nagrinėjant šią temą, vertėtų paliesti šiuos klausimus: dešimtainė pozicinė skaičiavimo sistema; sveikųjų skaičių dalumo sąvoka ir pagrindinės dalumo savybės; dalyba su liekana; lyginio sąvoka ir kai kurios lyginių savybės; pagrindinė aritmetikos teorema; natūraliųjų skaičių dalumo požymiai; didžiausias bendras daliklis ir mažiausias bendras kartotinis. Tuomet galima pateikti ne tik paprastų, dalumo iš 2, 5 ar 10, bet ir dalumo iš 3, 9 ar net iš 7 ir 13, požymių įrodymus.

Keli uždaviniai, kuriuos sprendžiant naudingos minėtos žinios.

1. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n skaičius:

a) $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 6;

b) $n^7 + 720n$ dalijasi iš 7;

c) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ dalijasi iš 9 (Rietavo olimpiada, 2005 m.)

2. Raskite liekaną, gaunamą skaičių $(116 + 17^{17})^{21}$ dalijant iš 37.

3. Raskite skaičiaus 56789^{1234} paskutinįjį skaitmenį.

4. Iš skaičių, kurie dalijasi iš 17, raskite tokį, kurio skaitmenų suma mažiausia (Rietavo olimpiada, 2003 m.)

5. Nustatykite, ar 81 - ženklis skaičius 111...1111 dalijasi iš 81 (Vilniaus miesto olimpiada, 2007 m.).

6. Įrodykite, kad skaičius $2^k + 1$ nesidalija iš 7 su visais natūraliaisiais skaičiais k (Pasvalio olimpiada, 2003 m.).

Skaičių teorijos elementai, supažindinantys mokinius su skaičiais, jų savybėmis, lavinantys skaičiavimo įgūdžius ir mąstymą bei formuojantys matematinių įrodymų įgūdžius, mokykliniame kurse turėtų išlikti, kokios mokyimo reformos bevyktų.

Literatūra

1. *Bendrosios programos ir išsilavinimo standartai. Priešmokyklinis, pradinis ir pagrindinis ugdymas*, Švietimo ir mokslo ministerijos Švietimo plėtotos centras, Vilnius (2003).
2. *Bendrosios programos ir išsilavinimo standartai XI–XII klasėms*, Švietimo aprūpinimo centras, Vilnius (2002).
3. *Brandos egzaminų programa, Matematika*, Vilnius (2003) (atnaujinta 2005).
4. E. Stankus, *Skaičių dalumas, Jaunajam matematikui* 3, Danieliaus leidykla, Vilnius (2002).
5. E. Stankus, *Skaičių dalumas, dalumo požymiai, Jaunajam matematikui* 7, Danieliaus leidykla, Vilnius (2006).

SUMMARY

E. Stankus. Number theory in secondary schools' mathematics

Secondary Schools' curricula are analyzed in terms of Number Theory. We deduce, that the concept of number is first and main in secondary schools' Mathematics. The problems of divisibility of numbers are also discussed, the examples of such problems are given.

Keywords: curricula, divisibility, number, number theory.