Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.*, 2007, 279–282

Lygtys ir nelygybės su parametru

Sergejus SOKOLOVAS (Kauno suaugusiųjų mokymo centras),
Eglė SOKOLOVAITĖ (KTU)
el. paštas: egle.sokolovaite@stud.ktu.lt

Pagrindinės sąvokos

Tegu $F(x,a)$ – funkcija, tolydi savo egzistavimo srityje.

1. Lygties $F(x,a)=0$ (nelygybės $F(x,a)>0$) egzistavimo sritimi S vadinsime aibę taškų (x,a), kuriuose reiškinys $F(x,a)$ turi prasmę.

2. Parametro reikšmę $a=a_0$ vadinsime leistinąja parametro reikšme, jeigu funkcijos $y=F(x,a_0)$ egzistavimo sritis nėra tuščia aibė.

Parametro leistinųjų reikšmių aibę žymėsime L.

3. Kai $a \notin L$, lygtis (nelygybė) neturi prasmės.

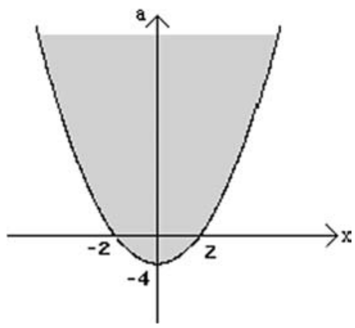
4. Lygties (nelygybės) parametro leistinųjų reikšmių aibę L galima rasti suprojektavus egzistavimo sritį S į parametro ašį Oa.

PAVYZDYS. Panagrinėsime nelygybę

$$\sqrt{a-x^2+4}>1.$$

$S=\{(x,a)|a \geqslant x^2-4\}$ (pavaizduota 1 brėž.);
$L=[-4;+\infty)$.
Kai $a \in L$, $a-x^2+4>1 \rightarrow x^2<a+3$.

<u>Ats.:</u> Kai $a<-4$, nelygybė neturi prasmės.
Kai $-4 \leqslant a \leqslant -3$, nelygybė neturi sprendinių.
Kai $a>-3$, $x \in (-\sqrt{a+3};\ \sqrt{a+3})$.



1 brėž.

Grafinis lygčių su parametru sprendimo būdas

1. Lygties $F(x,a)=0$ grafiku vadinama aibė taškų $G=\{(x,a)|F(x,a)=0\}$. Beje, $G \subset S$.

PAVYZDYS. $\arcsin(x^2-2x+2)+\sqrt{9-a^2}=\frac{\pi}{2}$.

Lygties egzistavimo sritis – atkarpa $S=\{(1,a)|-3 \leqslant a \leqslant 3\}$, o grafikas G yra du taškai – tos atkarpos galai: $(1,-3)$ ir $(1,3)$.

2. Lygties grafiko projekcija į parametro ašį Oayra aibė E tokių parametro reikšmių, su kuriomis lygtis turi sprendinių.

Aibėje $L\backslash E$ lygtis neturi sprendinių.

3. Tiesės $a = a_0 (a \in E)$ ir lygties grafiko sankirtos taškų abscisės yra lygties sprendiniai su parametro reikšme a_0.

PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\sqrt{1-x^2-a} = 1+x$.

Sprendimas. $S = \{(x,a) | a \leqslant 1 - x^2\}$.

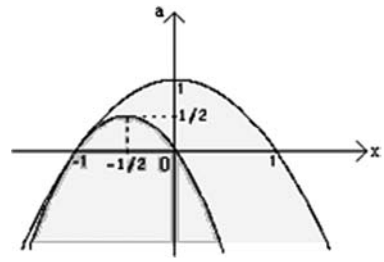
Lygties grafikas – aibė taškų (x,a), tenkinančių sistemą

$$\begin{cases} 1 - x^2 - a = (1+x)^2, \\ 1 + x \geqslant 0, \end{cases},$$

t.y. $G = \{(x,a) | a = -2x^2 - 2x, x \geqslant -1\}$. Suprojektavę S į Oa ašį, gauname $L = (-\infty; 1]$.

Atsižvelgę į lygties $a = -2x^2 - 2x$ sprendinius (kai $a \leqslant 1/2$)$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2a}}{2}$ ir išnagrinėję lygties grafiką gauname atsakymą.

Ats.: Kai $a > 1$, lygtis neturi prasmės.
Kai $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$, Ø.
Kai $a = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$.
Kai $0 \leqslant a < \frac{1}{2}$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2a}}{2}$.
Kai $a < 0$, $x = \frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}$.



2 brėž.

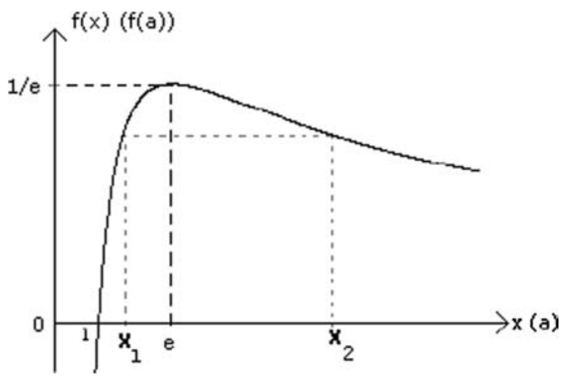
Lygčių tyrimas

Kartais tiksliųjų sprendinių (ar dalies jų) radimas neįmanomas. Tačiau šį tą vis gi galime ištirti.

PAVYZDYS. Ištirsime lygtį $x^a = a^x$.

Tyrimas.
$S = \{(x,a) | x > 0, a > 0\}$,
$L = (0; +\infty)$.
Išlogaritmavę gausime
$a \ln x = x \ln a$, t.y. $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$.
Ištyrę funkciją $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ ir nubraižę grafiką tęsiame analizę.

Išvados.
Kai $1 < a < e, x_1 = a, \ x_2 > e$ (parodyta 3 brėž.).
Kai $a > e$, $1 < x_1 < e$, $x_2 = a$.
Kai $a = e$ arba $0 < a \leqslant 1$, $x_0 = a$.



3 brėž.

Nelygybių su parametru sprendimas sričių metodu

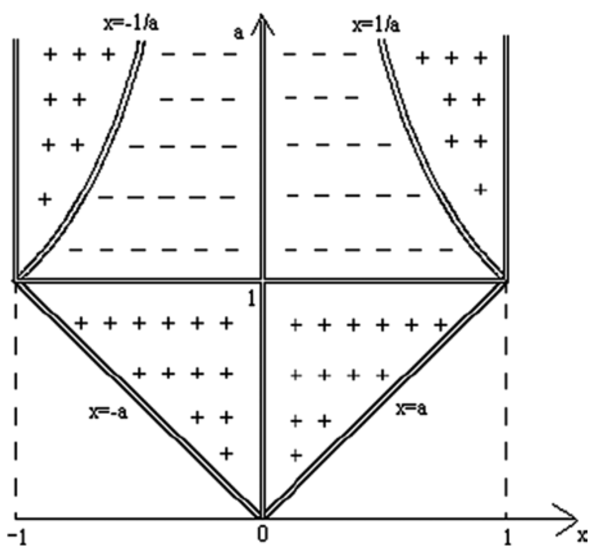
Sričių metodas – gerai žinomo intervalų metodo išplėtimas dvimačiam (plokštumos xOa) atvejui. Spręsdami nelygybę $F(x;a) > 0$, egzistavimo sritį S lygties $F(x;a) = 0$ grafiku G dalijame į sritis $S_1, S_2, \ldots, S_n$,kiekvienoje nustatydami reiškinio $F(x;a)$ ženklą.

PAVYZDYS. $\log_a(a-x) + \log_a(a+x) > \log_a\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right)$.

Sprendimas.
$S = \{(x,a)|a > |x|, |x| < 1, x \neq 0, a \neq 1\}$;
$L = (0;1) \cup (1;+\infty)$.
Lygties grafikas (4 brėž.)

$$G = \left\{(x;a)|a = \frac{1}{|x|},\ |x| < 1\right\}.$$

Ats.: Kai $a \leqslant 0, a = 1$, nelygybė neturi prasmės.
Kai $a \in (0,1)$, $x \in (-a,0) \cup (0,a)$.
Kai $a > 1$, $x \in (-1, -\frac{1}{a}) \cup (\frac{1}{a}, 1)$.



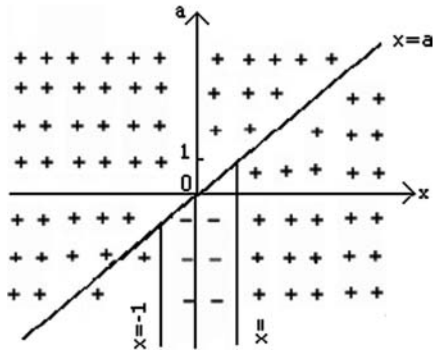
4 brėž.

PAVYZDYS. $|ax - x^2| \leqslant x - a$.

Sprendimas.
$S = R_2, L = (-\infty; +\infty)$.
Braižome lygties $|x| \cdot |a-x| + (a-x) = 0$ grafiką (5 brėž.):

$$G = \left\{(x,a)|a = x\right\} \cup \left\{(x,a)|x = \pm 1, a \leqslant x\right\}.$$

<u>Ats.:</u> Kai $a \geqslant 1$, $x = a$.
Kai $-1 \leqslant a < 1$, $x \in [a, 1]$.
Kai $a < -1$, $x \in [-1, 1] \cup \{a\}$.



5 brėž.

SUMMARY

S. Sokolovas, E. Sokolovaitė. Equations and inequalities with parameter

In this paper there are clarified a few principal concepts that are then being used to explain the process of solving and analysing equations and inequalities with parameter. The process of analysing inequalities is conveyed by including a method of areas which means the interval method expanded to the plane.

Keywords: equations, inequalities, interval method, parameter.