

Matematinų objektų ypatumai. Matiniai dydžiai

Algis KAVALIAUSKAS (VU, VGTU)

el. paštas: algis.kavaliauskas@mif.vu.lt

Pagrindinis matinių dydžių apibrėžtumo kriterijus

Praktikoje dažnai naudojami įvairūs matiniai dydžiai [2]. Pavyzdžiui, taško greitis, jo atstumas nuo koordinatinių pradžių, laikas, materialaus taško masė ir t.t. Fizikoje jų matai paprastai apibrėžiami tarptautinėje matavimo vienetų SI sistemoje (sutrump. pranc. Le Syst international d'unités, priimta 1960 metais). Formuluoiant mokyklinės matematikos uždutis, paprastai nesilaikoma SI sistemos. Čia dažniau matuojama centimetrais, negu metrais, minutėmis ar valandomis – negu sekundėmis ir t.t. Jeigu pažiūrėtume į mokyklinę matematiką atskirai (atsietai nuo gyvenimo), kaip į logikos sritį, tai iš tikrųjų turėtume pripažinti, kad yra korektiškas bet kurios matavimo sistemos pasirinkimas. Tačiau šį klausimą (ar dėl SI sistemos ignoravimo mokyklinėje matematikoje neiškreipiamas požiūris į SI sistemą kaip pagrindinę ir daugiausia paplitusią mūsų aplinkoje) paliksime atviru ir šiame straipsnyje toliau nenagrinėsime.

Žemiau pagrindinį dėmesį skirsime korektiškam matinių dydžių panaudojimui. Tam suformuluokime matinių dydžių apibrėžtumo kriterijų: uždutis turi būti invariantiška matų pakeitimo atžvilgiu. Kitaip tariant, jeigu uždutyje pakeisime vieno ar kito parametro matus, uždutis išliks korektiškai suformuluota, tik atsakymą gausime kitais vienetais. Tačiau, jeigu pakeitus kokio nors parametro matus, gausime klaidingą atsakymą, turėsime pripažinti, kad ši uždutis suformuluota nekorektiškai.

Toks pat teisingumo kriterijus turėtų būti taikomas uždutyje arba sprendimo eigoje naudojamoms formulėms (ar išraiškoms). Todėl formulės teisingumas turi nepriklausyti nuo atskirų į ją įeinančių parametrų matų pasirinkimo. Parinkdami kitą matų sistemą, turėtume tik atsakymą gauti kitais matais. Pati formulė turėtų išlikti teisinga. Tačiau kartais sutinkamos formulės, kurios iš esmės priklauso nuo matų sistemos ir, ją pakeitus, tampa neteisingomis. Tam pagrindinę įtaką daro jose naudojami dviejų tipų skaičiai. Aptarkime skaičius, turinčius matą, naudojamus formulėse kartu su bemačiais skaičiais.

Matiniai skaičiai

Formulėse įrašytus skaičius įprasta laikyti konstantomis. Kitaip tariant, jie visada pastovūs. Deja, kai kurie formulėse naudojami skaičiai gali kisti. Jie priklauso nuo pasirinktos matavimo sistemos. Tokius skaičius pavadinkime matiniais. Pavyzdžiui, apibrėžkime K lygybe $K = 2t$, kur laikas t matuojamas sekundėmis. Dydžio K matas iš tikrųjų yra neapibrėžtas. Neaišku, ar skaičius 2 turi matą. Jeigu skaičiaus 2 matas yra

m/s tai K matas sutampa su kelio matu, t.y. matuojamas metrais. Jeigu 2 yra bematis skaičius, tai K matas yra laikas ir yra matuojamas sekundėmis.

Korektiška būtų visus formulėse naudojamus matinius skaičius atskirti nuo nematinių, juos papildomai apibrėžiant, t.y. nurodant jų matus. Deja, formuluojant užduotį įprasta apibrėžti visų kintamųjų ir tik dalies parametrų matus. Likusieji matiniai parametrai tiesiog įrašomi į formulę kaip skaičiai. Jie ir tampa matiniais skaičiais.

Matinių skaičių naudojimo trūkumai

Tarkime, turime užduotį, kurioje yra formulė su neapibrėžtais matiniais skaičiais. Tada ši formulė yra neinvariantiška matų pakeitimo atžvilgiu. Iš tikrųjų, pakeitus kintamųjų matus kitais, formulėje esančios konstantos nepasikeičia (nors matinės konstantos turėtų pasikeisti) ir todėl formulė tampa neteisinga. Aišku, mokinys kartais galėtų pabandyti išsigelbėti iš tokios padėties. Tada jam tektų iš pradžių spręsti (mokykloje neįprasta) uždavinį – nustatyti, kurios iš formulėje naudojamų konstantų yra matinės, o kurios ne. Tada, jeigu jis susidorotų su šia užduotimi, galėtų korektiškai išspręsti matų pakeitimo užduotį.

Tam jam reikėtų, keičiant kintamųjų ir apibrėžtų parametrų matus, (dėl to formulė nepasikeičia) pakeisti ir užduotyje neapibrėžtų matinių skaičių matus (dėl to pasikeičia patys matiniai skaičiai ir kartu pasikeičia pati formulė).

Matinių konstantų išskyrimo iš formulėje esančių skaičių uždavinys ne visada išsprendžiamas vienareikšmiškai. Pavyzdžiui, turime kelio išraišką $S = 5(2 + 3t)$. Net jeigu žinome, kad kelias S yra matuojamas metrais, o laikas t – sekundėmis, vienareikšmiškai negalime nustatyti, kurie iš S įeinančių skaičių yra matiniai ir kokie yra jų matai. Galėtų būti 5 matas m/s, o likusieji du skaičiai – bemačiai, arba 2 ir 3 galėtų būti matiniai skaičiai su matu m/s, o 5 – bematė konstanta. Taip pat galimas atvejis, kai visi trys S įeinantys skaičiai yra matiniai. Todėl kartais mokiniui tektų spręsti neišsprendžiamus matinių skaičių suradimo uždavinius. Pailiustruokime matinių skaičių naudojimo prieštaravimus pavyzdžiu.

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Panagrinėkime pavyzdį iš 2006 metų valstybinių brandos egzaminų užduočių [1].

15. Į trikampį ABC , kurio pagrindo kraštinės AC ilgis 10 cm, o aukštinės BD ilgis 8 cm, įbrėžtas stačiakampis $EFGH$. Šio stačiakampio dvi viršūnės yra trikampio pagrindo kraštinėje, o kitos dvi – kitose trikampio kraštinėse.

Sakykite, EF ilgis x cm. Įrodykite, kad stačiakampio $EFGH$ plotas yra $S = 5/4(8x - x^2)$.

Šiame uždavinyje dalis formulėje esančių skaičių yra matiniai. Tačiau jie yra neapibrėžti, o vienareikšmiškai nustatyti, kurie iš skaičių yra matiniai – neįmanoma. Iš tikrųjų skaičiai 5 ir 4 turėtų būti arba nematiniai, arba vienodų matų. Jeigu šie du skaičiai yra matiniai, tai jų matus iš sąlygos neįmanoma nustatyti.

Jeigu mokinys, įpratęs fizikoje naudoti SI vienetų sistemą, norėtų plotą S gauti kvadratiniais metrais, jis susidurtų su dviem problemomis. Visų pirma, užduotis suformuluota nekorektiškai. Užrašytoji S formulė teisinga tik tada, kai stačiakampio

$EFGH$ plotas skaičiuojamas kvadratiniais centimetrais. Apskaičiavęs S kvadratiniais metrais, jis gautų kitokią išraišką ir todėl visiškai pagrįstai negalėtų įrodyti kad jo S lygi uždavinysje užrašytajai.

Antra, jeigu jau gautą formulę S (cm^2) norėtų pakeisti į S (m^2), jis susidurtų su neapibrėžtų matinių skaičių problema. Jam tektų nustatyti, kad 8 yra matinis skaičius ir jo matas yra centimetrai (kitaip būtų neįmanoma atlikti atimties veiksmą skliaustuose). Keičiant matus jam reiktų keisti ne tik x matą, bet ir pačią formulę. Bent jau koeficientas 8 turėtų pakisti. Tačiau fizikoje įprasta, kad pakeitus matus, lieka galioti ta pati formulė (formulės invariantiškumas matų keitimo atžvilgiu).

Tam, kad to išvengtume, reikia užduotyje nurodyti, kad S turėtų būti apskaičiuotas kvadratiniais centimetrais. Taip pat papildomai apibrėžti matinius skaičius. Visi skaičiai naudojami formulėje turi būti nematiniai, o matiniai dydžiai turėtų būti pažymėti raidėmis ir apibrėžti. Pavyzdžiui, pasiūlytume pakeisti užduoti taip:

Įrodykite, kad stačiakampio $EFGH$ plotas, apskaičiuotas kvadratiniais cm , yra $S = 5/4(ax - x^2)$, kur $a = 8\text{cm}$.

Dabar ši formulė yra invariantiška matų pakeitimo atžvilgiu. Galimas ir kitas šios problemos sprendimo būdas. Iš viso nenaudoti matinių dydžių. Kadangi čia nėra matų keitimo užduoties, tai uždavinys nedaug tenukentėtų, viską formuluojant bemačiame pavidale. Tada brandos egzamino užduotyje užrašytoji formulė S bemačiame pavidale būtų korektiška. Reiktų pridurti, kad geometrinius uždavinius yra įprasta pateikti bemačiame pavidale. Tačiau, jeigu uždavinys sudaromas su matiniais dydžiais, tai būtina laikytis tam tikru taisykliu.

Išvados

Matiniuose uždaviniuose (kuriose kintamieji ir parametrai yra matiniai dydžiai) užrašant formules reiktų laikytis taisyklės: visi formulėje esantys skaičiai turėtų būti nematiniai. Matinės konstantos tiesiogiai į formulę nerašomos. Jas reiktų pažymėti raidėmis, nurodant konstantų matus (jos taptų matiniais parametrais) ir šiuos parametrus įrašyti į formulę. Tokiu būdu, bet koks formulėje esantis skaičius būtų nematinė konstanta. Formulė būtų invariantiška matų keitimo atžvilgiu. T.y., norint pakeisti matus, reiktų pakeisti visų matinių kintamųjų ir parametrų matus ir įrašyti juos į formulę. Pačią formulę ir jos konstantas keisti nereiktų. Priešingu atveju, jeigu formulė sudaryta iš matinių ir nematinių skaičių, tai keičiant matus matiniai skaičiai turėtų pasikeisti. Formulė tampa neinvariantiška matų pakeitimo atžvilgiu, nes pakeitus matus dalis formulėje esančių konstantų pasikeičia. Kadangi paprastai formuluojant užduotį matiniai skaičiai neapibrėžiami (ir neatskiriami nuo nematinių), tai mokinys turi išspręsti papildomą matinių skaičių atskyrimo nuo nematinių uždavinį. Šis uždavinys ne visada vienareikšmiškai išsprendžiamas.

Todėl, siekiant išvengti šių problemų, matiniuose uždaviniuose visi formulėse naudojami skaičiai turėtų būti nematiniai.

Literatūra

1. *Matematika*, Mokyklinio brandos egzamino užduotis, LR švietimo ir mokslo ministerija, Nacionalinis egzaminų centras, www.egzaminai.lt
2. Л.А. Сена, *Единицы физических величин и их размерности*, Наука, Москва (1977).

SUMMARY

A. Kavaliauskas. Peculiarity of mathematical objects. Dimensional figures

The article deals with formulating of dimensional problems. It is shown what kind of difficulties arises when in one formula dimensional figures are used together with figures without any dimension. The problem of invariability of a formula in respect to change of dimension is introduced. Solutions of the problem are proposed.

Keywords: dimensional figure, dimensional variable, dimension, school mathematics.