Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.*, 2007, 139–142

Apie specialiųjų hiperplokštuminių elementų erdvių geometriją

Edmundas MAZĖTIS (VPU)
el. paštas: edmundas@vpu.lt

Sakykime, kad (M^n, α) – n-matė Rymano erdvė, $\alpha_{ij}(x^k)$ – metrinio tenzoriaus komponentės koordinačių sistemoje $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Jei T^*M^* – erdvės M^n koliestinė sluoksniuotė, $(x^i, y_j),\ i, j, k, \dots = 1, 2, .., n$ – jos lokaliosios koordinatės, tai teisingos tokios perėjimo formulės

$$\overline{x}^i = f^i(x^k), \quad \overline{y}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} y_k. \tag{1}$$

Tenzoriui $\alpha_{ij}(x^k)$ atvirkštinis tenzorius $\alpha^{ij}(x^k)$, tenkinantis lygybę $\alpha_{ik}\alpha^{ij} = \delta_i^j$, leidžia gauti invariantą

$$t = \frac{1}{2}\alpha^{ij} y_i y_j, \tag{2}$$

vadinamą energija (žr. [1]). Jei $y^i = \alpha^{ik} y_k,\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i},\ \partial^i = \frac{\partial}{\partial y_i}$, tai teisingos lygybės $\partial_i t = \frac{1}{2}\partial_i \alpha^{kh} y_k y_h,\ \partial^i t = y^i,\ \partial^i y^j = \alpha^{ij},\ y^i y_i = 2t$. Tenzoriaus α_{ij} Kristofelio simboliai γ_{ij}^k, ir diferencialiniai operatoriai $\delta_i = \partial_i + L_{ik}\partial^k$ bei ∂^i, čia $L_{ij} = y_k \gamma_{ij}^k$, leidžia užrašyti liestinės erdvės $T_p T^* M^n,\ p \in T^* M^n$ invariantinį išskaidymą į teisioginę sumą:

$$T_p T^* M^n = T_p^v T^* M^n \oplus T_p^h T^* M^n. \tag{3}$$

Iš jos matome, kad diferencialinis – geometrinis objektas L_{ij} apibrėžia koliestinės erdvės $T^* M^n$ tiesinę sietį. Kadangi teisinga lygybė $\gamma_{ij}^k = \partial^k L_{ij}$, tai kaip seka iš koliestinių sluoksniuočių teorijos [4], dydžiai γ_{ij}^k yra erdvės $T^* M^n$ afiniosios sieties objekto komponentės.

Koliestinė sluoksniuotė $T^* M^n$ yra vadinama metrine hiperplokštuminių elementų erdve [2], jei joje apibrėžtas neišsigimęs simetrinis metrinis tenzorius $g_{ij}(x^k, y_h)$. Apibrėžkime tenzorių g_{ij} lygybėmis:

$$g_{ij} = \alpha_{ij} + \frac{y_i y_j}{t}. \tag{4}$$

Tuomet jam atvirkštinio tenzoriaus komponentės tenkina lygybes

$$g^{ij} = \alpha^{ij} - \frac{y^i y^j}{3t}. \tag{5}$$

Kadangi iš (2) lygybės matome, kad $t > 0$, tai iš (5) lygybės išplaukia sąlyga $g^{ij} y_i y_j = \frac{2}{3}t > 0$, kartu su (4) ir (5) lygybėmis nustatanti teigiamai apibrėžtą sluoksniuotės T^*M^n metriką.

Iš kitų lygybių

$$\delta_i t = 0, \quad \delta_i y_j = L_{ij}, \quad \delta_i y^k = -\gamma^k_{ih} y^h \tag{6}$$

matome, kad tenzoriaus g_{ij} kovariantinė išvestinė afiniosios sieties γ^k_{ij} atžvilgiu yra lygi nuliui, t.y., afinioji sietis γ^k_{ij} yra metrinė sietis. Dydžiai $S^i_{jpq} = \partial_p \gamma^i_{jq} - \partial_q \gamma^i_{jp} + \gamma^i_{qk}\gamma^k_{jp} - \gamma^i_{pk}\gamma^k_{jq}$ yra šios sieties kreivumo tenzoriaus komponentės. Todėl tiesinės sieties L_{ij} kreivumo tenzoriui $R_{ipq} = \delta_q L_{ip} - \delta_p L_{iq}$ teisinga lygybė $R_{ipq} = y_k S^k_{ipq}$. Iš jos gauname, kad erdvės T^*M^n tiesinė sietis tada ir tik tada yra plokščia, kai bazinės Rymano erdvės M^n kreivumo tenzorius lygus nuliui.

Nesunkiai įsitikinama, kad kovariantinė išvestinė ∇_k afiniosios sieties γ^k_{ij} atžvilgiu pasižymi šiomis savybėmis:

$$\nabla_k y_i = \nabla_k y^i = 0, \quad \nabla_k t = 0. \tag{7}$$

Iš (7) lygybių gauname, kad dydžiai

$$c^{ijk} = \frac{1}{2}\partial^k g^{ij} = \frac{1}{6}\Big(\frac{y^i y^j y^k}{t^2} - \frac{\alpha^{ik} y^i + \alpha^{kj} y^i}{t}\Big), \tag{8}$$

tenkina sąlygą $\nabla_h c^{ijk} = 0$. Taigi hiperplokštuminių elementų erdvė T^*M^n su (4) ir (5) lygybėmis apibrėžta metrika yra Landsbergo erdvių analogas tiesinių elementų erdvėse (žr. [2])

Sakykime, kad T^A_B $(A, B, \ldots = 1, 2, \ldots, 2n)$ – tenzorinis laukas, apibrėžtas erdvėje T^*M^n. Bazėse ∂_i, ∂^i ir dx^i, dy_i yra teisingas išdėstymas

$$T = T^i_j \partial_i dx^j + T^{n+i}_j \partial^i dx^j + T^i_{n+j} \partial_i dy_j + T^{n+i}_{n+j} \partial^i dy_j, \tag{9}$$

o normalizuotose bazėse δ_i, ∂^i ir Dx^i, dy_j turime lygybę

$$T = t^i_j \delta_i Dx^i + t^{n+i}_j \partial_i Dx^j + t^i_{n+j} \delta_i dy_j + t^{n+i}_{n+j} \partial^i Dy_j, \tag{10}$$

kurioje $t^i_j, t^{n+i}_j, t^i_{n+j}$ ir t^{n+i}_{n+j} yra atitinkamų tenzorių komponentės. Bet kokiems realiesiems skaičiams a, b, c, d pažymėkime $t^i_j = ay^i y_j$, $t^{n+i}_j = bg_{ij}$, $t^i_{n+j} = cg^{ij}$, $t^{n+i}_{n+j} = dy^j y_i$. Tuomet teisingos lygybės

$$\begin{aligned} &T^i_j = ay^i y_j - cg^{ik} L_{kj}, \quad T^{n+i}_{n+j} = dy^j y_i + cg^{jk} L_{ik}, \\ &T^{n+i}_j = bg_{ij} + (a-d) y^k y_j L_{ik} - cg^{pg} L_{ip} L_{qj}, \quad T^i_{n+j} = cg^{ij}. \end{aligned} \tag{11}$$

Sakoma, kad tenzoriumi T_B^A yra apibrėžiama hipeplokštuminių elementų erdvės tenzorinė struktūra, jei tenzoriaus komponentėms galioja sąlyga

$$T_C^A T_B^C = \lambda \delta_B^A, \quad \lambda \in \{-1, 1\}. \tag{12}$$

Kai $\lambda = -1$, gautoji struktūra dar yra vadinama beveik kompleksine, o kai $\lambda = 1$ – beveik sandaugos struktūra [3].

1 TEOREMA. *Jei parametrai a, b, c, d tenkina lygybes $a = d = 0,\ bc = \lambda$, tai tenzorius T_B^A apibrėžia vienparametrinių tenzorinių struktūrų šeimą.*

Teoremos įrodymas yra (12) lygybių ir (11) išraiškų išvada.

Tenzorinė struktūra yra vadinama integruojama, jei lygus nuliui jos Nijenhuiso tenzorius [3]:

$$N_{BC}^A = T_C^D(\partial_B T_D^A - \partial_D T_B^A) - T_B^D(\partial_C T_D^A - \partial_D T_C^A). \tag{13}$$

Iš 1 teoremos matome, kad tenzorinių struktūrų tenzoriaus komponentės T_B^A gaunamos iš (11) lygybių kai $a = d = 0,\ b = \pm\frac{1}{c}$. Įstatę šias išraiškas į (13) lygybę ir atlikę skaičiavimus, įsitikiname tokios teoremos teisingumu:

2 TEOREMA. *Metrinės hiperplokštuminių elementų erdvės tenzorinės struktūros tada ir tik tada yra integruojamos, kai bazinės daugdaros M^n Rymano metrikos kreivumo tenzorius lygus nuliui, o tenzorius g^{ij} tenkina sąlygas $\partial^k g^{ij} - \partial^i g^{kj} = 0$.*

Hiperplokštuminių elementų erdvės T^*M^n afiniosios sieties abjektą Λ_{AB}^C apibrėžiame, užrašydami erdvės $T_pT^*M^n$ bazinių operatorių $\partial_A = \delta_A^i \partial_i + \delta_A^{n+i}\partial^i$ kovariantinės išvestinės išraišką

$$\nabla_{\partial_A}\partial_B = \Lambda_{AB}^C \partial_C. \tag{14}$$

Kaip žinome [4], objektas $\Lambda_{h+i\ h+j}^k$ yra tenzorius. Jei jis lygus nuliui, tai tenzorių sudaro ir objekto $\Lambda_{n+i\ j}^k$ komponentės. Jei $\Lambda_{n+i\ n+j}^k = \Lambda_{n+i\ j}^k = 0$, tai afinioji sietis Λ_{AB}^C vadinama redukuotaja. Šiuo atveju objektai Λ_{ij}^k ir $-\Lambda_{n+i\ j}^{n+k}$ taip pat nustato afiniąsias sietis.

Afinioji sietis Λ_{AB}^C yra vadinama asocijuota tenzorinei struktūrai, jei šios struktūros struktūrinio tenzoriaus kovariantinė išvestinė jos atžvilgiu yra lygi nuliui.

3 TEOREMA. *Afinioji sietis su komponentėmis*

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{jk}^i = -\Lambda_{n+i\ \ k}^{n+j} = \gamma_{jk}^i, \quad \Lambda_{jk}^{n+i} = -\nabla_k L_{ij},\\
&\Lambda_{j\ n+k}^i = -\Lambda_{n+i\ n+k}^{n+j} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{y^i y^k y_j}{t^2} - \frac{2\alpha^{ik} y_j}{t}\Big),\\
&\Lambda_{j\ n+k}^{n+i} = -\partial^k L_{ij} - \frac{1}{4}\Big(\frac{y^k y^h y_j}{t^2} - \frac{2\alpha^{kh} y_j}{t}\Big)L_{ih} - \frac{1}{4}\Big(\frac{y^k y^h y_i}{t^2} - 2\alpha^{kh} y_i t\Big)L_{hj}, \qquad (15)\\
&\Lambda_{jk}^k = \Lambda_{jn+k}^i = 0.
\end{aligned}$$

yra asocijuota visoms beveik kompleksinėms ir beveik sandaugos struktūroms (11).

Teorema įrodoma, randant tenzoriaus T_B^A kovariantinę išvestinę ir pasinaudojant (6), (7), (8) lygybėmis.

Literatūra

1. D.D. Parosniuc, A class of locally symmetric Kähler Einstein structures on the nonzero cotangent bundle of a space form, *Balkan Journal of Geometry and its Application*, **9**(2), 68–81 (2004).
2. H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer (1959).
3. K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, Singapoore World, Sci. Publ. Co. (1984).
4. E. Mazėtis, Apie Kartano erdvių geometriją, *Liet. matem. rink.*, **38**(2), 221–233 (1998).

SUMMARY

On the geometry on special spaces of hyperplane elemente

In this paper analystes metric space of hyperplane elemente with special metric. Is prowed, that in such spaces intrinsic almost complex and almost product structures exists, criteria of its integrability and associated connections established.

Keywords: space of hyperplae elemente, almost complex and almost product structures, integrable structures, associated connections.