Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.,* 2007, 133–135

Об оценке одного функционала

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)
e-mail:gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

Резюме. Рассматривается оценка функционала

$$\inf\big(\sup|f^{(i)}(t)|\big),$$

где супремум берется по $i=0,1,2,$ а инфимум по всем функциям из класса $KC^2([0,1])$, удовлетворяющим граничным условиям

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f(1)=0,\quad f'(1)=0.$$

Ключевые слова: краевая задача, уравнения Шредингера, функционал, задача Понтрягина.

Рассматривается оценка функционала

$$\inf\big(\sup|f^{(i)}(t)|\big),$$

где супремум берется по $i=0,1,2,$ а инфимум по всем функциям из класса $KC^2([0,1])$, удовлетворяющим граничным условиям

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f(1)=0,\quad f'(1)=0. \tag{1}$$

Задачи подобного рода возникают рассматривая периодическое решение уравнения Шредингера [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\Delta u+i|u|^p u,\quad t>0.$$

с начальным условием

$$u(0,x)=u_0(x).$$

Сначала решим задачу Понтрягина (задачу о быстродействии) [2]:

$$T\to\min,\quad f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad |f''(0)|\leqslant a,\quad f(T)=0,\quad f'(T)=0, \tag{2}$$

т.е. найти минимальное значение T, такое, что выполнялись условия (2), здесь a некоторое положительное число.

Аналогично как в 2, получаем, что решение задачи Понтрягина есть функция

$$f(t)=\begin{cases}-at^2/2+t+1, & 0\leqslant t\leqslant s,\\ at^2/2-aTt+aT^2/2, & s<t\leqslant T.\end{cases}$$

Константы s и t находим из условия, что функция $f(t)$ принадлежит классу $KC^2([0,1])$, т.е. они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -as^2/2+s+1=as^2/2-aTs+aT^2/2, \\ -as+1=as-aT. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$s=\frac{T}{2}+\frac{1}{2a}, \quad T=\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{4}{a}}.$$

Чтобы применить задачу Понтрягина к оценке нашего исходного функционала, должны решить уравнение $T=1$, т.е.

$$\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{4}{a}}=1.$$

Получаем $a=3+\sqrt{10}$. Непосредственно проверяем, что модули функции и ее первая производная в интервале $[0,1]$ не превышают числа $3+\sqrt{10}$. Таким образом справедливо следующее следствие.

Следствие.

$$\inf\left(\sup|f^{(i)}(t)|\right)\leqslant 3+\sqrt{10}.$$

Литература

1. T. Ogava, Y. Tsutsumi, Blow up of solutions for the nonlinear schrodinger equation with quartic potential and periodic boundary condition, *Lecture Notes in Math.*, **1450**, 236 – 251 (1990).
2. В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров, *Сборник задач по оптимизации*, Москва, Наука (1984).

REZIUMĖ

G. Puriuškis. Apie vieno funkcionalo įvertį

Nagrinėjamas funkcionalas

$$\inf(\sup|f^{(i)}(t)|),$$

čia supremumas imamas pagal $i=0,\ 1,\ 2$, o infimumas pagal visas funkcijas iš $KC^2([0,1])$, tenkinančias kraštines sąlygas

$$f(0)=1, \quad f'(0)=1, \quad f(1)=0, \quad f'(1)=0.$$

SUMMARY

G. Puriuškis. On the estimation of the functional

There is considered the functional

$$\inf\bigl(\sup|f^{(i)}(t)|\bigr),$$

The supremum is taken by $i=0,\ 1,\ 2,$ the infimum is taken by the function set $KC^2([0,1])$, with boundary conditions

$$f(0)=1, \quad f'(0)=1, \quad f(1)=0, \quad f'(1)=0.$$

Keywords: Schrödinger equations, boundary problem, Pontriagin's problem.