Liet. matem. rink., **47**, *spec. nr.*, 2007, 49–52

Daugiamačių skaičiuojančių procesų didžiųjų skaičių dėsnis

Vaidotas KANIŠAUSKAS (ŠU)
el. paštas: mat.kat@fm.su.lt

Tarkime, kad

$$N_t(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n^1 \leqslant x_1 t, \dots, T_n^d \leqslant x_d t), \tag{1}$$

kur $1(A)$ yra aibės A indikatorius, $x_i > 0$, $t \geqslant 0$, yra daugiamatis skaičiuojantis procesas, apibrėžtas stochastinėje bazėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ su $T_n = (T_n^1, \dots, T_n^d)$ – seka atsitiktinių vektorių, turinčių nepriklausomas ir nemažėjančias komponentes, tenkinančias tokias asimptotines Kramerio sąlygas:

A: Egzistuoja teigiami skaičiai $\beta_1, \dots, \beta_d$ ir diferencijuojamos funkcijos $\psi_{\beta_i}^i(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ tokie, kad

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbb{E} \exp\{\lambda n^{1-\beta_i} T_n^i\} = \psi_\beta^i(\lambda) < \infty,$$

$i = 1, \dots, d$, o $\mathbb{E}$ – žymi matematinį vidurkį.

Darbe nagrinėsime normuoto proceso $t^{-\frac{1}{\gamma}} N_t(x_1, \dots, x_d)$ asimptotinį elgesį, kai $t \to \infty$ ir $\gamma > 0$. Autoriaus žiniomis, tokio normuoto atsitiktinio proceso asimptotinis elgesys buvo nagrinėjamas taikant normavimą t^{-1} paprasčiausiu atveju, kai $T_n^i = \sum_{j=1}^{n} X_j^i$, $\mathbb{E}X_1^i = a_i < \infty$, o $X_1^i, \dots, X_n^i$, $i = 1, \dots, d$, yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirtę atsitiktiniai dydžiai. Darbe [1] parodyta, kad tuo atveju teisinga tokia asimptotinė formulė

$$\lim_{n\to\infty} t^{-1} \mathbb{E} N_t(x_1, \dots, x_d) = \min_{j \in \{1,\dots,d\}} \frac{x_j}{a_j}.$$

Taip pat apibrėšime vienmačius procesus

$$N_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n^i \leqslant t), \quad t \geqslant 0,$$

laikydami, kad $N_i(\infty) = \infty$, $i = 1, \dots, d$.

Pasinaudosime lema.

LEMA [2]. *Jei patenkinta A sąlyga, tai* P *– b.v.*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\beta_i} T_n^i = a_i = (\psi_{\beta_i}^i(x))'\Big|_{x=0}, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N_i(t)^{\beta_i}} = a_i. \tag{3}$$

Pagrindinis darbo rezultatas yra toks:

TEOREMA. *Tarkime, kad patenkinta A sąlyga. Tada* P *– b.v.*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\beta}} N_t(x_1, ..., x_d) = B,$$

kai

$$B = \begin{cases} \min\limits_{j\in\{1,...,d\}} \left(\frac{x_j}{a_j}\right)^{\frac{1}{\beta}}, & \text{kai } \beta = \beta_1 = ... = \beta_d, \\ \min\limits_{j\in\{i_1,...,i_k\}} \left(\frac{x_j}{a_j}\right)^{\frac{1}{\beta}}, & \text{kai } \beta = \beta_{i_1} = ... = \beta_{i_k} > \beta_j,\ k \geqslant 1,\ i_1, ..., i_k, j \in \{1, ..., d\}, \\ 0, & \text{kai } \beta = \beta_i < \beta_j,\ \ i \neq j,\ \ i, j \in \{1, ..., d\}. \end{cases}$$

Įrodymas. Akivaizdu, kad

$$N_t(x_1, ..., x_d) \leqslant \min_{j\in\{1,...,d\}} N_j(tx_j). \tag{4}$$

Remiantis lema P – b.v.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N_j(x)}{x^{\frac{1}{\beta_j}}} = \left(\frac{1}{a_j}\right)^{\frac{1}{\beta_j}}, \quad j = 1, ..., d.$$

Vadinasi, P – b.v.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_j(tx_j)}{t^{\frac{1}{\beta_j}}} = \left(\frac{x_j}{a_j}\right)^{\frac{1}{\beta_j}}, \quad j = 1, ..., d. \tag{5}$$

Kai $\beta_i > \beta_j$, P – b.v.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{\beta_j}}} N_j(tx_j) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha}}{t^{\frac{1}{\beta_j}}} N_j(tx_j) = 0, \tag{6}$$

kur $\alpha > 0$.

Kai $\beta_i < \beta_j$, P – b.v.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{\beta_i}}} N_j(tx_j) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\gamma} t^{\frac{1}{\beta_j}}} N_j(tx_j) = 0, \tag{7}$$

kur $\gamma > 0$.

Iš (4)–(7) gauname

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\beta}} N_t(x_1, ..., x_d) \leqslant \min\left(\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\beta}} N_1(tx_1), ..., \lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\beta}} N_d(tx_d)\right) = B. \quad (8)$$

Įrodysime nelygybę į kitą pusę. Tuo tikslu apibrėžiame procesą

$$N_{t,v}(x_1, ..., x_d) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(\frac{T_n^1}{x_1} \vee \frac{T_n^2}{x_2} \vee ... \vee \frac{T_n^d}{x_d} \leqslant t\right),$$

kur $a \vee b = \max(a, b)$.

Bet kuriam skaičiuojančiam procesui $N(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1(T_n \leqslant t)$, jei P – b.v.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n^\beta} = a,$$

tai P – b.v.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t^{\frac{1}{\beta}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

nes galioja nelygybė

$$T_{N(t)-1} \leqslant t < T_{N(t)+1} \quad \text{ir} \quad N(\infty) = \infty.$$

Tegu $T_n = T_n^1 \vee T_n^2 \vee ... \vee T_n^d$ ir $T_n^1, ..., T_n^d$ tenkina A sąlygą, tada

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{T_n^1}{n^\beta} \vee \frac{T_n^2}{n^\beta} \vee ... \vee \frac{T_n^d}{n^\beta}\right)$$
$$= \begin{cases} a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_d, & \text{jei } \beta = \beta_1 = ... = \beta_d, \\ a_{i_1} \vee ... \vee a_{i_k}, & \text{jei } \beta = \beta_{i_1} = ... = \beta_{i_k} > \beta_j,\ k \geqslant 1,\ i_1, ..., i_k, j \in \{1, ..., d\}, \\ \infty, & \text{jei } \beta = \beta_i < \beta_j,\ i \neq j,\ i, j \in \{1, ..., d\}. \end{cases}$$

Kai

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(T_n^1 \vee T_n^2 \vee ... \vee T_n^d \leqslant t\right),$$

gauname, kad P – b.v.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t^{\frac{1}{\beta}}} = \begin{cases} \min\limits_{i\in\{1,...,d\}} \frac{1}{a_i^{\beta_i}}, & \text{jei } \beta = \beta_1 = ... = \beta_d, \\ \min\limits_{r\in\{i_1,...,i_k\}} \left(\frac{1}{a_r}\right)^{\frac{1}{\beta}}, & \text{jei } \beta = \beta_{i_1} = ... = \beta_{i_k} > \beta_j,\ k \geqslant 1, \\ & \quad i_1, ..., i_k,\ j \in \{1, ..., d\}, \\ 0, & \text{jei } \beta = \beta_i < \beta_j,\ i \neq j,\ j \neq \varnothing. \end{cases}$$

Analogiškai gauname, kad

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\beta}} N_{t,v}(x_1, \ldots, x_d) = B.$$

Kadangi

$$N_t(x_1, \ldots, x_d) \geqslant N_{t,v}(x_1, \ldots, x_d),$$

tai

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\beta}} N_t(x_1, \ldots, x_d) \geqslant B. \tag{9}$$

Sujungę (8) su (9) gauname teoremos rezultatą. Teorema įrodyta.

Išvada. Tarkime, kad turime teigiamų nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seką $\{X_n^j,\ n \geqslant 1\}$, tenkinančią Kramerio sąlygą:

$$\mathbb{E}e^{\lambda X_1^j} < \infty, \quad \lambda > 0, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Tada daugiamačiui išplėstiniui atstatymo procesui

$$N_{t,\beta_1,\ldots,\beta_d}(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(n^{\beta_1 - 1} S_n^1 \leqslant x_1 t, \ldots, n^{\beta_d - 1} S_n^d \leqslant x_d t), \quad t \geqslant 0, \quad x_i > 0,$$

kai $S_n^j = \sum_{i=1}^{n} X_i^j$, $\beta_j \in (0, 1)$ galioja teoremos rezultatas.

References

1. I.S. Molchanov, E. Omey, E. Kozarovitzky, An elementary renewal theorem for random compact convex sets, *Adv. Appl. Prob. (SGSA)*, **27**, 931–942 (1995).
2. V. Kanišauskas, Large deviations for counting processes, *Liet. matem. rink.*, **40**(spec. nr.), 287–289 (2000).

SUMMARY

V. Kanišauskas. The low of the large nubers for multivariate counting processes

In this paper we counsider the low of large nubers for multivariate counting processes when the extended conditions of Cramers is satisfied.

Keywords: counting process, Cramer's condition.