Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 402–406

Atsitiktinių vektorių geometrinis maks (min) stabilumas

Algimantas AKSOMAITIS, Irma IVANOVIENĖ
Kauno technologijos universitetas
Studentų g. 50, LT-51368 Kaunas
el. paštas: algimantas.aksomaitis@ktu.lt; irma.paleviciute@stud.ktu.lt

Santrauka. Atsitiktinių dydžių geometrinis maks (min) stabilumas pakankamai yra išnagrinėtas. Straipsnyje mes praplečiame šią geometrinio stabilumo sąvoką vektoriams. Ieškome ryšio tarp vektorių geometrinio maks stabilumo ir min stabilumo.

Raktiniai žodžiai: min stabilus, maks stabilus, vektorių ekstremumai, perkėlimo teorema.

Įvadas

Tarkime, kad $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots (X_{N_n}, Y_{N_n})$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai vektoriai su skirstinio funkcija $F(x, y) = P(X_1 \leqslant x, Y_1 \leqslant y)$; $N_n, n \geqslant 1$ – atsitiktiniai dydžiai, įgyjantys natūraliąsias reikšmes ir nepriklausomi nuo (X_i, Y_i) $i \geqslant 1$.

Dvimačių vektorių maksimumo struktūra

$$Z_{N_n} = \left(Z_{N_n}^{(1)}, Z_{N_n}^{(2)}\right),$$

čia $Z_{N_n}^{(1)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_{N_n})$, $Z_{N_n}^{(2)} = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_n})$.

Analogiškai

$$W_{N_n} = \left(W_{N_n}^{(1)}, W_{N_n}^{(2)}\right),$$

čia $W_{N_n}^{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_{N_n})$, $W_{N_n}^{(2)} = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_n})$.

Ateityje atsitiktinį dydį N_n kartais žymėsime tiesiog N.

Tarkime, kad N skirstinys yra geometrinis:

$$P(N = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \geqslant 1.$$

1 APIBRĖŽIMAS. Skirstinio funkciją $F(x, y)$ (arba vektorių (X, Y)) vadiname geometriškai maks stabiliąja, jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos a_{p1}, a_{p2} ir $b_{p1} > 0$, $b_{p2} > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_N^{(1)} - a_{p1}}{b_{p1}} \leqslant x,\ \frac{Z_N^{(2)} - a_{p2}}{b_{p2}} \leqslant y\right) = F(x, y). \tag{1}$$

Geometrinis min stabilumas apibrėžiamas taip:

$$P\left(\frac{W_N^{(1)} - c_{p1}}{d_{p1}} \leqslant x,\ \frac{W_N^{(2)} - c_{p2}}{d_{p2}} \leqslant y\right) = F(x, y). \tag{2}$$

Vektorių geometrinio maks (min) stabilumo apibrėžimai yra [4] straipsnyje pateiktų vienmačių atsitiktinių dydžių (arba skirstinių) geometrinio stabilumo analogas. Minimame straipsnyje įrodoma, kad vienmačių skirstinių atveju iš geometrinio maks stabilumo išplaukia geometrinis min stabilumas ir atvirkščiai.

Mūsų tikslas patikrinti šio teiginio galiojimą atsitiktiniams vektoriams.

1. Teiginiai ir jų įrodymas

Kai N yra geometrinis su parametru p, jo generuojančioji funkcija

$$g_N(z) = \mathrm{E}z^N = \frac{pz}{1-(1-p)z}. \tag{3}$$

Kadangi

$$P\big(Z_k^{(1)} \leqslant xb_{p1} + a_{p1}, Z_k^{(2)} \leqslant yb_{p2} + a_{p2}\big) = F^k(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2}), \quad k \geqslant 1,$$

tai, panaudoję pilnosios tikimybės formulę, gauname geometrinio maks stabilumo kriterijų:

$$\frac{pF(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})}{1-(1-p)F(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})} = F(x, y). \tag{4}$$

Geometrinio min stabilumo kriterijus yra sudėtingesnis. Kadangi

$$\begin{aligned}
P\big(W_N^{(1)} \leqslant xd_{p1} + c_{p1}, W_N^{(2)} \leqslant yd_{p2} + c_{p2}\big) &= 1 - P\big(W_N^{(1)} \geqslant xd_{p1} + c_{p1}\big) \\
&\quad - P\big(W_N^{(2)} \geqslant yd_{p2} + c_{p2}\big) + P\big(W_N^{(1)} \geqslant xd_{p1} + c_{p1}, W_N^{(2)} \geqslant yd_{p2} + c_{p2}\big) \\
&= 1 - g_N\big(1 - F_1(xd_{p1} + c_{p1})\big) - g_N\big(1 - F_2(yd_{p2} + c_{p2})\big) \\
&\quad + g_N\big(P(X_1 \geqslant xd_{p1} + c_{p1}, Y_1 \geqslant yd_{p2} + c_{p2})\big),
\end{aligned}$$

tai geometrinio min stabilumo kriterijus yra

$$\begin{aligned}
1 &- \frac{p(1 - F_1(xd_{p1} + c_{p1}))}{1-(1-p)(1 - F_1(xd_{p1} + c_{p1}))} - \frac{p(1 - F_2(yd_{p2} + c_{p2}))}{1-(1-p)(1 - F_2(yd_{p2} + c_{p2}))} \\
&+ \frac{p(P(X_1 \geqslant xd_{p1} + c_{p1}, Y_1 \geqslant yd_{p2} + c_{p2}))}{1-(1-p)(P(X_1 \geqslant xd_{p1} + c_{p1}, Y_1 \geqslant yd_{p2} + c_{p2}))} = F(x, y).
\end{aligned} \tag{5}$$

1 TEIGINYS. *Tarkime, kad vektorių koordinatės yra nepriklausomos ir geometriškai maks* (*min*) *stabilios. Tada vektoriai nėra geometriškai maks* (*min*) *stabilūs.*

Įrodymas. Koordinačių geometrinio maks stabilumo kriterijus [4]

$$\frac{pF_1(xb_{p1} + a_{p1})}{1-(1-p)F_1(xb_{p1} + a_{p1})} = F_1(x) \tag{6}$$

ir

$$\frac{pF_2(yb_{p2}+a_{p2})}{1-(1-p)F_2(yb_{p2}+a_{p2})}=F_2(y) \tag{7}$$

tenkinamas. Iš (4), (6) ir (7) išplaukia, kad

$$\begin{aligned}&\frac{pF_1(xb_{p1}+a_{p1})F_2(yb_{p2}+a_{p2})}{1-(1-p)F_1(xb_{p1}+a_{p1})F_2(yb_{p2}+a_{p2})}\\&\quad\neq\frac{p^2F_1(xd_{p1}+c_{p1})F_2(yd_{p2}+c_{p2})}{(1-(1-p)F_1(xd_{p1}+c_{p1}))(1-(1-p)F_2(yd_{p2}+c_{p2}))}\\&\quad=F_1(x)F_2(y).\end{aligned}$$

Geometrinio maks stabilumo nėra.

Analogiškai įrodomas geometrinio min stabilumo nebuvimas, kai $F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$.

1 pavyzdys. Tarkime, kad

$$F_1(x)=1-\frac{1}{1+x^\alpha},\quad F_2(y)=1-\frac{1}{1+y^\beta},\quad x,y\geqslant 0,\ \alpha,\beta>0. \tag{8}$$

Nepriklausomų koordinačių atveju

$$F(x,y)=1-\frac{1}{1+x^\alpha}-\frac{1}{1+y^\beta}+\frac{1}{1+y^\beta+x^\alpha+x^\alpha y^\beta}.$$

Imdami $a_{p1}=0$, $a_{p2}=0$ ir $b_{p1}=p^{-\frac{1}{\alpha}}$, $b_{p2}=p^{-\frac{1}{\beta}}$, gauname:

$$\frac{p(1-\frac{1}{1+x^\alpha p^{-1}})}{1-(1-p)(1-\frac{1}{1+x^\alpha p^{-1}})}=F_1(x),\qquad \frac{p(1-\frac{1}{1+y^\beta p^{-1}})}{1-(1-p)(1-\frac{1}{1+y^\beta p^{-1}})}=F_2(y). \tag{9}$$

Tačiau

$$\frac{p\big(1-\frac{1}{1+x^\alpha p^{-1}}\big)\big(1-\frac{1}{1+y^\beta p^{-1}}\big)}{1-(1-p)\big(1-\frac{1}{1+x^\alpha p^{-1}}\big)\big(1-\frac{1}{1+y^\beta p^{-1}}\big)}=\frac{x^\alpha y^\beta}{p+y^\beta+x^\alpha+y^\beta x^\alpha}\neq F(x,y), \tag{10}$$

kai $0<p<1$.

Analogiškai

$$\begin{aligned}1&-\frac{p(1-F_1(xp^{\frac{1}{\alpha}}))}{1-(1-p)(1-F_1(xp^{\frac{1}{\alpha}}))}-\frac{p(1-F_2(yp^{\frac{1}{\beta}}))}{1-(1-p)(1-F_2(yp^{\frac{1}{\beta}}))}+\\&+\frac{p(P(X_1\geqslant xp^{\frac{1}{\alpha}},Y_1\geqslant yp^{\frac{1}{\beta}}))}{1-(1-p)(P(X_1\geqslant xp^{\frac{1}{\alpha}},Y_1\geqslant yp^{\frac{1}{\beta}}))}=\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{1+x^\alpha} - \frac{1}{1+y^\beta} + \frac{1}{1+y^\beta+x^\alpha+px^\alpha y^\beta}$$
$$\neq F_1(x)F_2(x).$$

Taigi, geometrinio maks (min) stabilumo nėra.

Imkime priklausomų koordinačių skirstinio funkciją

$$F(x,y) = \frac{1}{1+y^{-\beta}+x^{-\alpha}}, \quad x>0, \quad y>0. \tag{11}$$

Ją galima gauti iš skirstinio funkcijos

$$G(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{p+y^\beta+x^\alpha+y^\beta x^\alpha}, \quad x>0, \quad y>0,$$

esančios (10) sąryšyje, imdami $p = p_n = \frac{1}{n}$, kai $n \to \infty$ (tai būdinga perkėlimo teoremai [2]).

Nesunku įsitikinti, kad marginaliosios skirstinio funkcijos

$$F_1(x) = \frac{1}{1+x^{-\alpha}} \ \text{ ir } \ F_2(y) = \frac{1}{1+y^{-\beta}}$$

yra geometriškai maks (min) stabilios. Jos sutampa su (8) skirstinio funkcijomis.

2 TEIGINYS. *Iš $F(x,y)$ geometrinio maks stabilumo bendru atveju neišplaukia geometrinis min stabilumas.*

Įrodymas. Imkime skirstinio funkciją $F(x,y)$ apibrėžtą (11) sąryšiu. Kadangi

$$\frac{pF(xp^{-\frac{1}{\alpha}}, yp^{-\frac{1}{\beta}})}{1-(1-p)F(xp^{-\frac{1}{\alpha}}, yp^{-\frac{1}{\beta}})} = \frac{1}{1+x^{-\alpha}+y^{-\beta}},$$

tai $F(x,y)$ yra geometriškai maks stabili. Tačiau geometrinio min stabilumo kriterijus (5) nėra išpildytas.

Pateiksime perkėlimo teoremos atsitiktinių dydžiu atveju [3] analogą atsitiktiniams vektoriams [1].

1 TEOREMA. *Tarkime, kad atsitiktinis dydis N_n yra geometrinis su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Jeigu*

$$\lim_{n\to\infty} n\big(1 - F(xb_{n1}+a_{n1}, yb_{n2}+a_{n2})\big) = u(x,y),$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_{N_n}^{(1)} - a_{n1}}{b_{np1}} \leqslant x, \frac{Z_{N_n}^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \leqslant y\right) = \Psi(x,y);$$

čia skirstinio funkcija

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{1+u(x,y)}.$$

Įrodymas analogiškas vienmačiam atvejui [3], panaudojant lygybę:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} \leqslant x\right) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

3 TEIGINYS. *Skirstinio funkcija $\Psi(x, y)$ yra geometriškai maks stabili, kai $n \cdot u(x b_{n1} + a_{n1}, y b_{n2} + a_{n2}) = u(x, y)$.*

Įrodymas. Įrodymas išplaukia iš sąryšių:

$$\begin{aligned} &p_n \frac{\Psi(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2})}{1 - (1 - p_n)\Psi(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2})} \\ &\quad = \frac{p_n}{p_n + u(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2})} \\ &\quad = \frac{1}{1 + n \cdot u(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2})}. \end{aligned}$$

Pastebėsime, kad funkcijos

$$u(x, y) = x^{-\alpha} + y^{-\beta},\ u(x, y) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-y},\ u(x, y) = (-x)^{\alpha} + (-y)^{\beta},$$
$$u(x, y) = \mathrm{e}^{-x} + y^{-\beta} \ \text{ ir t. t.}$$

tenkina 3 teiginio sąlygas.

Analogiškus uždavinius galime spręsti minimumų schemoje.

Literatūra

1. A. Jokimaitis. *Daugiamačių atsitiktinių dydžių, ekstremaliųjų reikšmių asimptotika*. Disertacija mokslų daktaro laipsniui. Vilnius, 1998.
2. J. Galambos. *The Asymptotic Theory of Extremes Order Statistics*. Wiley, New York, 1978.
3. B.V. Gnedenko, D.B. Gnedenko. O raspredeleniyakh Laplasa i logisticheskom kak predel'nykh v teorii veroyatnostei. *Serdika*, 8:299–234, 1984.
4. S. Satheesh, N.N. Unnikrishnan. On the stability of geometric extremes. *Journal of the Indian Statistical Association*, 42:99–109, 2004.

SUMMARY

A. Aksomaitis, I. Ivanovienė. Geometric max stability of random vectors

Geometric max (min) stability of random variables is investigated enough. In this article, geometric stability concept is extended for the vectors. We also search connections between the geometric max (min) stability and max (min) stability of vectors.

Keywords: min stable, max stable, extremes of vectors, transfer theorem.