Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 64–68

Matematinės analizės kursas technikos universitete

Rimas BANYS
Vilniaus Gedimino technikos universitetas
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius
e-mail: rimasbanys@takas.lt

Santrauka. Pateiktos kelios pastabos apie matematinės analizės dėstymą techniškajame universitete ir keletas pavyzdinių užduočių.

Raktiniai žodžiai: matematinė analizė, išvestinė, integralas, artutiniai įverčiai.

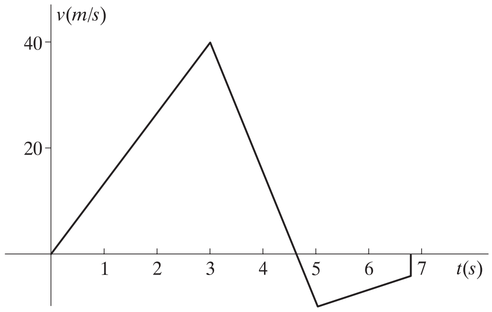
1. Įvadas

Technikos universiteto matematikos programos remiasi matematine analize ir tiesine algebra. Matematinės analizės reikšmė didžiulė, ji yra tarsi vartai, pro kuriuos einama į techniškąsias (ir ne tik) profesijas. Tenka pripažinti, kad dažnai šios disciplinos mokymas per daug koncentruojamas į mechanines skaičiavimo procedūras, nepakankamai dėmesio skiriant sąvokų turiniui. Mokymas paremtas imitavimu: dėstytojo aiškinimas + iliustruojantys pavyzdžiai + imituojantys pratimai. Tai duoda greitą paviršutinišką progresą, bet neugdo kūrybingumo. Šiame straipsnelyje pateikti kelios pavyzdinės užduotys, kokių autoriaus nuomone yra per mažai tiek vadovėliuose, uždavinynuose, tiek ir studentams išdėstomoje medžiagoje.

2. Matematinės analizės dėstymas

Matematinės analizės mokymą reikėtų orientuoti į sąvokas, o ne į skaičiavimus. Nepateisinama, kai šios disciplinos mokymas koncentruojamas į mechanines popieriaus ir tušinuko problemas. Svarbiau yra suprasti funkcijas, jų grafikus, išvestines ir integralus, negu įgyti gerų diferenciavimo ir integravimo įgūdžių. Aišku, reikia mokėti ir diferencijuoti, ir integruoti, tačiau svarbiau yra suprasti, kaip išvestinė ar integralas nusako funkcijos elgesį. Štai pora pavyzdžių.

1 pavyzdys. 1 pav. parodytas vertikaliai aukštyn startavusio raketos modelio greičio grafikas. Reikia nustatyti:
1) kada baigėsi kuras;
2) kada išsiskleidė parašiutas;
3) kada raketa pasiekė maksimalų aukštį;
4) kada nusileido;
5) kokį pasiekė maksimalų aukštį;
6) koks yra kalvos, ant kurios nusileido raketa, aukštis.

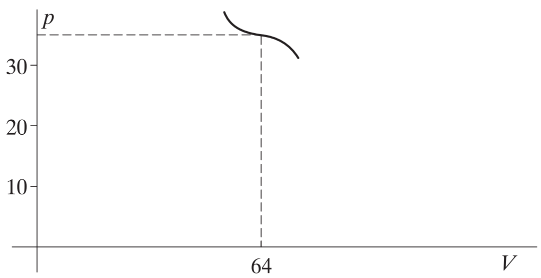


1 pav. Vertikaliai aukštyn startavusio raketos modelio greičio grafikas.

2 pavyzdys. Tarkime, kad tam tikro dujų kiekio tūris ir slėgis yra susieti lygtimi

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = c,$$

čia p yra dujų slėgis, V – tūris, o a, b, c yra empirinės konstantos, kurias reikia nustatyti. Tuo tikslu atliekamas bandymas – didinant tūrį matuojamas slėgis ir braižomas šių dydžių priklausomybės grafikas. Gauto grafiko dalis pavaizduota 2 pav. Remiantis šiuo grafiku, reikia nustatyti konstantas a, b, c.



2 pav. Tūrio ir slėgio priklausomybės grafikas.

Iš grafiko matome, kad, kai $V = 64$, funkcijos $p = p(V)$ reikšmė yra $p = 35$, o jos pirmoji ir antroji išvestinės lygios (artimos) nuliui. Įstatę šias p ir V reikšmes į funkcijos ir išvestinių išraiškas, gauname tris lygtis su nežinomaisiais a, b, c.

Informatika verčia peržiūrėti matematikos programas, nes jos problemoms labiau reikia diskrečiosios, o ne tolydžiosios matematikos. Todėl reikia rasti protingą pusiausvyrą tarp diskrečiosios ir tolydžiosios matematikos. Informatikams, socialinių, vadybos mokslų studentams daugiau reikia diskrečiosios matematikos. Tradicinės tolydžiosios matematikos labiau reikia fizinių ir technikos mokslų studentams. Būtų idealu, jei diskrečioji matematika ir matematinė analizė būtų apjungti viename integruotame kurse. Šiandien studentui patrauklios atrodo tik tos temos, kurios susijusios su kompiuteriais, informatika. Tai reikia turėti omeny, parenkant temas ir jas išdėstant. Svarbu nuolat parodyti problemos sąryšį su diskrečiuoju modeliu. Pavyzdžiui, užuot apsiribojus integralo $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ reikšmės $\ln 2$ gavimu, įdomiau būtų rasti tą $\ln 2$ reikšmę, kuri artutinai lygi funkcijos

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 2]$$

integralinei sumai:

$$\ln 2 \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{-1}.$$

Didindami n, galime rasti $\ln 2$ reikšmę kokiu norime tikslumu.

Bene kiekvienas studentas žino, kad jeigu kūno greitis yra laiko t funkcija $v = v(t)$, tai per laiką nuo $t = a$ iki $t = b$ kūno nueitas kelias lygus šios funkcijos integralui atkarpoje $[a, b]$. Tačiau realiai nedažnai pasitaiko, kad greičio funkcija yra žinoma. Deja, toli gražu ne kiekvienas studentas sugalvoja, kaip apskaičiuoti pavyzdžiui laivo nuplauktą atstumą, remiantis greičio matavimo prietaiso nubrėžtu grafiku. O tai jau diskretusis uždavinys.

3 pavyzdys. Tarkime, kad startavusio sportinio automobilio ar raketos greitis matuojamas kas sekundę. Kaip apskaičiuoti per pirmąsias 10 sekundžių įveiktą atstumą?

Dauguma studentų žino, kad norint rasti funkcijos kitimo greitį, reikia rasti tos funkcijos išvestinę. Tačiau dažnai tenka remtis ne užrašyta funkcijos formule, o duomenimis, kurie yra eksperimentų ar stebėjimų rezultatai. Pavyzdžiui, gyventojų skaičius nustatomas tam tikrais laiko intervalais. Tokiu atveju kitimo greitį (pvz. gyventojų skaičiaus) reikia įvertinti iš tų stebėjimų rezultatų.

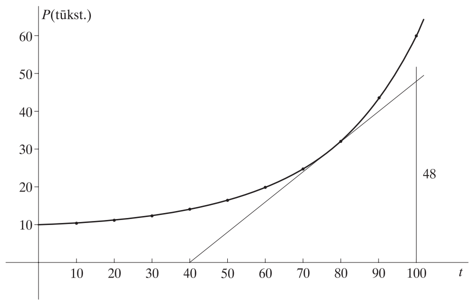
Pateiksime kelis pavyzdžius.

3. Pavyzdžiai

1 pavyzdys. Miestelio gyventojų surašymas buvo vykdomas kas dešimt metų, pradedant 1900 metais. Gauti duomenys surašyti lentelėje. Reikia įvertinti, kokiu greičiu gyventojų skaičius P (tūkstančiais) didėjo 1980 metais.

Metai	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Gyv. sk. (tūkst.)	10	11	12	13	15	18	22	27	34	43	60

Sprendimas. Ortogonaliosios koordinačių sistemos horizontalioje ašyje atidėkime laiką (metais). Reikšmė $t = 0$ atitinka 1900 metus. Vertikalioje ašyje atidėsime gyventojų skaičių P (tūkstančiais). Iš lentelės pateiktų duomenų gauname 11 taškų, kuriuos sujungiame glodžia kreive. Ši kreivė yra artima nežinomos funkcijos $P = f(t)$ grafikui. Gyventojų skaičiaus didėjimas 1980 metais yra lygus šios funkcijos grafiko



3 pav. Gyventojų skaičiaus kitimas.

liestinės, nubrėžtos taške (80; 34), krypties koeficientui. Iš 3 pav. radę geometriškai liestinės su x ašimi sudaromo kampo tangentą, gauname artutinę gyventojų skaičiaus kitimo reikšmę (tūkst. per metus):

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \approx \frac{48}{60} = 0.8.$$

Vadinasi, 1981 metais gyventojų skaičius turėjo būti apie 34800.

2 pavyzdys. Apskaičiuoti ribą

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sin \frac{\pi i}{n} \right)^2.$$

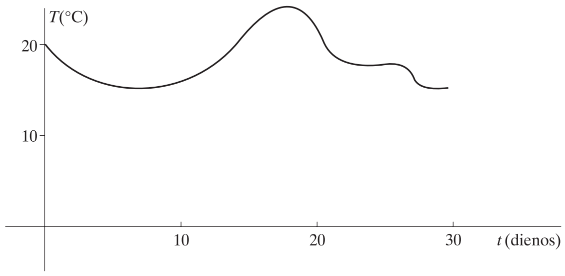
Sprendimas. Lengvai įžiūrime, kad $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{\pi i}{n})^2$ yra funkcijos $f(x) = \sin^2 \pi x$ Rymano integralinė suma atkarpoje $[0, 1]$. Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sin \frac{\pi i}{n} \right)^2 = 2\int_0^1 \sin^2 \pi x \, \mathrm{d}x.$$

3 pavyzdys. Po raketos starto kas sekundę buvo nustatomas jos greitis. Pasirodė, kad po pirmos sekundės greitis buvo 2 m/s, po dviejų sekundžių – 8 m/s, o po trijų sekundžių – 20 m/s. Pasinaudoję trapecijų formulę, apskaičiuokite, kokį atstumą nuskriejo raketa per pirmąsias tris sekundes.

4 pavyzdys. Vidurnaktį oro temperatūra buvo $14°C$, po valandos $11°C$, antrą valandą nakties $7°C$, o trečią valandą nukrito iki nulio. Pasinaudoję artutine formule (trapecijų, parabolių), apskaičiuokite vidutinę oro temperatūrą tarp vidurnakčio ir trečios valandos.

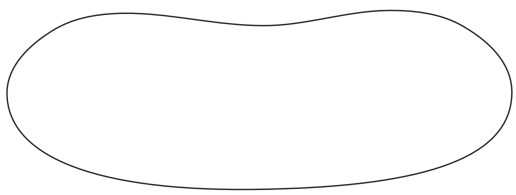
5 pavyzdys. 4 pav. pateiktas vieno mėnesio temperatūros grafikas. Remiantis šiuo grafiku, apskaičiuoti mėnesio vidutinę temperatūrą.



4 pav. Vieno mėnesio temperatūros grafikas.

Norint rasti vidutinę temperatūrą, reikia integruoti funkciją, kurios grafikas pavaizduotas. Tačiau kadangi funkcijos analizinės išraiškos nežinome, uždavinį diskretizuojame. Suskaidę atkarpą $[0, 30]$ į smulkias dalis, kiekvienoje jų išmatuojame kurią nors temperatūros reikšmę (kurią pakankamai trumpame intervale galima laikyti pastovia). Sudėję gautų temperatūros reikšmių ir atitinkamų intervaliukų ilgių sandaugas, gauname artutinę integralo reikšmę.

6 pavyzdys. Apskaičiuoti 5 pav. pavaizduotos figūros plotą.



5 pav. Apskaičiuoti figūros plotą.

Čia vėl naudojame bendrą integralo taikymo schemą. Suskaidę visą figūrą siauromis vertikaliomis juostelėmis, kiekvienos juostelės plotą galime artutinai apskaičiuoti. Sudėję visų juostelių plotus, gauname figūros ploto artinį. Siaurindami juosteles, gauname vis tikslesnį ploto įvertį.

Pateikti pavyzdžiai, nors ir labai paprasti, daugeliui studentų pasirodo per sunkūs. O priežastis turbūt ta, kad studentai rečiau susiduria su užduotimis, kurios yra artimesnės realiam gyvenimui, o dažniau su tokiom, kai reikia diferencijuoti arba integruoti duotą funkciją.

SUMMARY

R. Banys. A course of calculus at technical university

A few remarks concerning teaching calculus at technical university are stated. Some examples are provided.

Keywords: calculus, derivative, integral, numerical evalution.