Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
51 tomas, 2010, 279–284 www.mii.lt/LMR/

Politominio diagnostinio testo matematinis modelis

Aleksandras Krylovas[1,2], Natalja Kosareva[2]

[1] *Mykolo Romerio universitetas*
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
[2,3] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: krylovas@mruni.lt; natalja.kosareva@vgtu.lt

Santrauka. Siūloma politominių diagnostinių operatorių kaip universalios testavimo priemonės kūrimo technologija pagal esamus empirinius duomenis. Diagnostiniai operatoriai turi tenkinti aksiomas, kurios formuluojamos remiantis testo validumo principu. Siūloma metodika leidžia prognozuoti testo rezultato tikimybinį skirstinį ir testo teikiamos informacijos kiekį.

Raktiniai žodžiai: matavimai, diagnostiniai operatoriai, tikimybinis skirstinys, matematinis modeliavimas.

1. Autorių darbuose [2, 6, 4] buvo pasiūlyta diagnostinių testų konstravimo metodika, leidžianti maksimizuoti gaunamos apie tam tikrą matuojamąjį požymį (konstruktą) informacijos kiekį. Pagrindinės modelio prielaidos buvo dvi: 1) diagnozuojamas požymis reiškiamas realiuoju skaičiumi $p \in [0,1]$ ir 2) diagnostiniai operatoriai apibūdinami nemažėjančiomis funkcijomis $d_j(p) : [0,1] \to [0,1]$. Funkcijų $d_j(p)$ prasmė – tikimybė teisingai atsakyti į atitinkamą testo klausimą, esant matuojamojo požymio reikšmei p. Reikalavimas, kad teisingo atsakymo tikimybė yra nemažesnė, jei yra aukštesnis požymio lygmuo p (t.y. $d_j(p_1) \leqslant d_j(p_2)$, kai $p_1 < p_2$) atitinka testo validumo [1] principą: kiekvienas testo klausimas turi matuoti būtent tai kam skirtas šitas testas.

Testui konstruoti iš tam tikro diagnostinių operatorių rinkinio pasirenkamos funkcijos (klausimai) $d_1, d_2, \ldots, d_n$, taip, kad įgytų maksimalią reikšmę entropijos [8] funkcija (5), esant apriorinei informacijai apie matuojamojo požymio pasiskirstymą testuojamoje populiacijoje. Pasiūlytos metodikos privalumas – nėra griežtų reikalavimų funkcijų d_j klasėms: jos gali būti labai įvairios ir pakankamai paprastomis formulėmis reiškiamos funkcijos [6, 3]. Tačiau esminis modelio trūkumas – du reikalavimai diagnostiniams operatoriams d_j: jie turi būti dichotominiai ir nepriklausomi. Šie reikalavimai gana rimtai apriboja metodikos taikymą praktikoje. Diagnostiniai operatoriai dažnai yra tam tikrų sukauptų dalykinių žinių arba matavimų technologijų rezultatas. Pavyzdžiui, medicinoje, sociologijoje, ekonomikoje, technikoje diagnostinis operatorius gali būti tokio pavidalo funkcija[1]

$$f(p) = \begin{cases} f_j, & \text{kai } p \in [p_1^{(j)}, p_2^{(j)}], \\ 0, & \text{kai } p \notin [0,1], \end{cases} \tag{1}$$

[1] Tai reiškia, kad jei p įgyja reikšmes iš tam tikro intervalo, tai funkcijos reikšmė, pavyzdžiui, ekonominis indeksas lygus nurodytai reikšmei.

čia $p_1^{(j)} < p_2^{(j)}$, $p_2^{(j-1)} \leqslant p_1^{(j)}$. Autorių darbe [4] parodyta kaip iš (1) funkcijų galima konstruoti dichotominius diagnostinius operatorius (požymius), tačiau akivaizdu, kad tokių požymių nepriklausomumo reikalavimas nėra pagrįstas.

Šio darbo tikslas – apibendrinti testo matematinį modelį [2, 6, 4] atvejui, kai diagnostiniai operatoriai yra dichotominių klausimų (t.y. į kiekvieną bloko klausimą galimi tik du atsakymai *taip* arba *ne*) blokai, tačiau klausimai viename bloke gali būti priklausomi. Šis modelis vadinamas *politominiu.*

2. Pažymėkime $d(p)$ – surinktų balų skaičių (iš bloko klausimų) esant reikšmei p. Testo politominiu diagnostiniu operatoriumi (klausimų bloku) vadiname vektorių

$$\mathbf{D}(p) = \big(d_0(p), d_1(p), \ldots, d_m(p)\big),$$

čia m – klausimų skaičius bloke, $d_k(p)$ – tikimybė, kad esant matuojamojo dydžio reikšmei p bus teisingai atsakyta lygiai į k ($k = 0, 1, \ldots, m$) bloko klausimų. Taigi turime diskretųjį skirstinį:

k	0	1	$\cdots$	m
$P\{d(p) = k\}$	$d_0(p)$	$d_1(p)$	$\cdots$	$d_m(p)$

$$0 \leqslant d_k(p) \leqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{m} d_k(p) \equiv 1.$$

Suformuluokime kitus reikalavimus funkcijoms $d_k(p)$:

(A_m) $d_m(p)$ yra nemažėjančioji kintamojo $p \in [0, 1]$ funkcija;
(A_0) $d_0(p)$ yra nedidėjančioji funkcija;
(V) funkcija $V(p) = \sum\limits_{k=1}^{m} k d_k(p)$ yra nemažėjančioji.

Reikalavimas (A_m) reiškia, kad tikimybė atsakyti į visus m bloko klausimus yra tuo didesnė, kuo didesnis yra matuojamojo požymio p lygmuo. Aksiomos (A_0) prasmė analogiška: tikimybė neatsakyti nė į vieną bloko klausimą yra tuo didesnė, kuo mažesnis lygmuo p. Funkcija $V(p)$ yra teisingų atsakymų į m bloko klausimų vidurkis. Taigi suformuluotos aksiomos atitinka testo validumo reikalavimą – kuo didesnis lygmuo p tuo daugiau taškų (teisingų atsakymų) vidutiniškai gaunama.

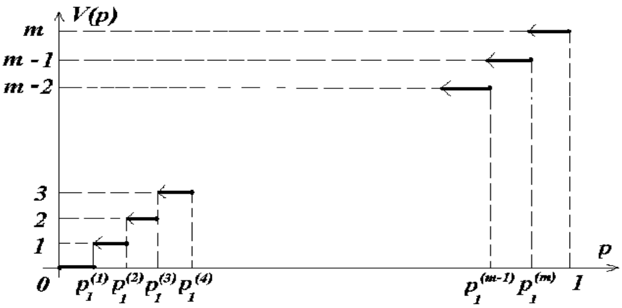
Pastebėkime, kad dichotominio ($m = 1$) testo atveju, teiginiai (A_m), (A_0) ir (V) yra ekvivalentūs, t. y. pakanka suformuluoti tik kurį nors vieną iš jų. Pateiksime analogišką [4] idealiosios diagnostikos operatoriaus funkciją $V(p)$. Tarkime, kad

$$0 = p_1^{(1)} < p_2^{(1)} = p_1^{(2)} < p_2^{(2)} = p_1^{(3)} < \cdots < p_2^{(m-1)} = p_1^{(m)} < p_2^{(m)} = 1,$$

t.y. visas intervalas $p \in [0, 1]$ suskaidytas į intervalus $(p_1^{(j)}, p_2^{(j)}]$ taip, kad

$$\bigcup_{j=1}^{m} \big(p_1^{(j)}, p_2^{(j)}\big] = (0, 1].$$

Funkcija $V(p)$ – vidutinio teisingų atsakymų skaičiaus į bloko (iš m) klausimų yra laiptinė funkcija, kurios grafikas pavaizduotas 1 pav. Idealiuoju atveju (kai teoriškai



1 pav. Idealus diagnostinis operatorius.

atliekama absoliučiai tiksli diagnostika), ji leistų surušiuoti testuojamuosius į $m+1$ grupę, priklausomai nuo atsakymų rezultatų ir matuojamojo požymio p, nes bet kuri reikšmė p priklauso lygiai vienam intervalui $(p_1^{(j)}, p_2^{(j)}]$.

3. Nagrinėsime aksiomas (A_m), (A_0) ir (V), kai $m=2$, t.y. ištirsime dviejų klausimų bloką. Tarkime, kad funkcijos $d_j(p)$ yra atkarpomis tolydžiai diferencijuojamos. Tada iš (A_m) ir (A_0) gauname, kad $\forall p \in [0,1]$

$$d_2'(p) \geqslant 0, \qquad d_0'(p) \leqslant 0$$

ir pastebėję, kad

$$V(p) = d_1(p) + 2d_2(p) = 1 - d_0(p) - d_2(p) + 2d_2(p) = 1 - d_0(p) + d_2(p),$$

matome:

$$V'(p) = -d_0'(p) + d_2'(p) \geqslant 0,$$

t.y. funkcija $V(p)$ yra nemažėjančioji. Taigi, kai $m=2$, savybė (V) išplaukia iš (A_m) ir (A_0). Nesunku matyti, kad šis teiginys negalioja, kai $m>2$.

Tarkime, kad funkcijos d_0 ir d_2 yra tokios (žr. 2 pav.):

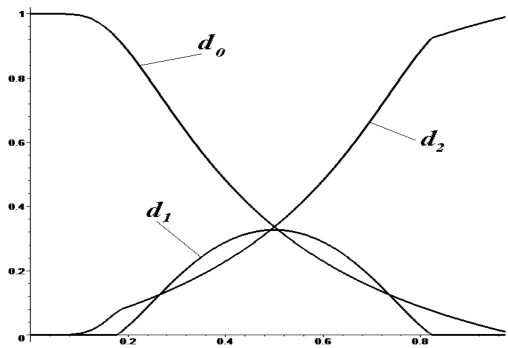
$$d_0(p;a,b) = \frac{e^{a\frac{1-p}{p}} - 1}{e^{a\frac{1-p}{p}} + b}, \tag{2}$$

$$d_2(p;a,b) = \min\left\{\frac{e^{a\frac{p}{1-p}} - 1}{e^{a\frac{p}{1-p}} + b}, 1 - d_0(p;a,b)\right\}, \tag{3}$$

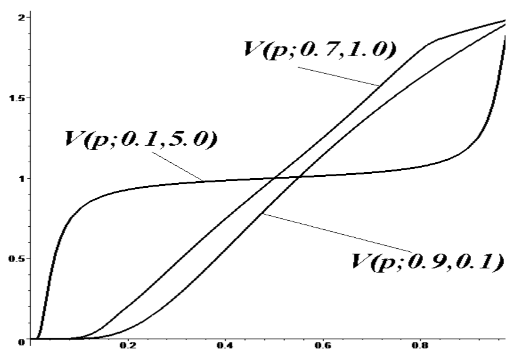
$$d_1(p;a,b) = 1 - d_0(p;a,b) - d_2(p;a,b). \tag{4}$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad funkcijos $d_j(p)$ gali būti ir kito pavidalo (žr. [3]), o tai leidžia išvengti dirbtinių apribojimų funkcijoms (pavyzdžiui, imti tik logistines funkcijas) ir geriau suderinti jas su empiriniais duomenimis. Diagnostinių operatorių parametrų nustatymas yra atskiras uždavinys (dichotominiu atveju jis buvo nagrinėjamas [4]) ir sudarys autorių būsimųjų tyrimų objektą.

Žemiau (3 pav.) pateikti funkcijos $V(p;a,b) = d_1(p;a,b) + 2d_2(p;a,b)$ grafikai, esant skirtingoms parametrų a ir b reikšmėms. Čia funkcijos d_0 ir d_2 apibrėžtos



2 pav. Funkcijos $d_j(p; 0.7, 1.0)$.



3 pav. Funkcija $V(p; a, b)$.

formulėmis (2), (3), funkcija d_1 – formule (4). Funkcija V rodo kiek vidutiniškai bus teisingų atsakymų į du vieno bloko klausimus, kai matuojamojo požymio lygmuo yra p.

4. Tarkime, kad testą sudaro k blokų po $m^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$ klausimų kiekviename. Nagrinėsime atsitiktinio dydžio $S(p) = nd(p)$, (čia $n = \sum_{j=1}^{k} m^{(j)}$) – surinktų testo balų skaičiaus skirstinį: $\mathbf{P}\{S = l\} = p_l$, $l = 0, 1, \ldots, n$. Jei testas sudarytas iš k nepriklausomų politominių diagnostinių operatorių (klausimų) $\mathbf{D}_1(p), \mathbf{D}_2(p), \ldots, \mathbf{D}_k(p)$, tai bendrasis testo balas $S = S(p)$ turi apibendrintąjį binominį skirstinį [5], kurio generuojančioji funkcija lygi:

$$\Psi(p) = ES^x = \prod_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{m_{(j)}} d_i^{(j)}(p) x^i, \qquad d_0^{(j)} = 1 - \sum_{i=1}^{m^{(j)}} d_i^{(j)}.$$

Taigi išreiškę polinomą

$$\Psi(p) = P_0(p) + P_1(p)\,x + \cdots + P_n(p)\,x^n,$$

gauname tikimybes $P\{S(p) = l\} = P_l(p)$, $l = 0, 1, \ldots, n$.

Tarkime, kad yra žinomas matuojamojo požymio p skirstinys

$$f(p) = \begin{cases} f_0(p) \geqslant 0, & \text{kai } p \in [0,1], \\ 0, & \text{kai } p \notin [0,1] \end{cases}$$

visoje populiacijoje (čia $\int_0^1 f_0(p)\,dp = 1$). Tada galima apskaičiuoti tikimybes

$$p_l = P\{S = l\} = \int_0^1 P_l(p) f_0(p)\,dp, \quad l = 0, 1, \ldots, n.$$

Tikimybė p_l rodo populiacijos dalį, gavusių testo balą l ($l = 0, 1, \ldots, n$).

Gaunamos informacijos kiekį apibūdina entropija [8]

$$I(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_k) = -\sum_{l=0}^{n} p_l \ln p_l. \tag{5}$$

Taigi suformuluokime geriausio diagnostinio testo konstravimo algoritmą. Turime politominių klausimų banką

$$B = \bigl\{k_1^{(m_1)}, k_2^{(m_2)}, \ldots, k_N^{(m_N)}\bigr\},$$

čia $k_j^{(m_j)}$ – klausimų blokas, m_j – klausimų skaičius bloke. Reikia atrinkti klausimų rinkinį $K = \{k_1^{(i_1)}, \ldots, k_r^{(i_r)}\} \subset B$ taip, kad $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$ ir rasti

$$\max_{K \subset B} I(D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{r_m}).$$

5. Darbe pasiūlyta politominių testų kūrimo technologija, leidžianti kiekvienai tiriamųjų objektų grupei parinkti individualius diagnostinius operatorius iš esamų diagnostinių operatorių banko ir įvertinti gaunamos informacijos kiekį apie tiriamųjų objektų stebimą savybę. Ši metodika nereikalauja dirbtinių apribojimų tiriamo latentinio dydžio skirstiniui ir diagnostinių operatorių pavidalui. Diagnostiniai operatoriai gali būti labai įvairaus pavidalo funkcijos ir tai esminis mūsų metodikos skirtumas palyginti, pavyzdžiui, su IRT (užduočių sprendimo teorija [7]) metodais. Reikalavimai diagnostiniams operatoriams (funkcijoms) formuluojami kaip aksiomų sistema. Pasiūlyta metodika leidžia konstruoti orientuotus į populiacijos ypatumus diagnostinius testus.

Literatūra

[1] A. Anastasi and S. Urbina. *Psychological Testing.* Prentice Hall, 7th edition, 1997.

[2] A. Krylovas, N. Kosareva. Žinių tikrinimo matematinis modelis. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **48/49**:217–221, 2008.

[3] A. Krylovas, N. Kosareva. Mathematical modelling of diagnostic tests. In M. Grasserbauer, L. Sakalauskas and E.K. Zavadskas(Eds.), 5^{th} *International Vilnius Conference EURO Mini Conference "Knowledge-Besed Technologies and OR Methodologies for Strategic Decisions of Sustainable Development" (KORSD-2009)*, pp. 120–125, Vilnius, 2009.

[4] N. Kosareva, A. Krylovas. Diagnostinio testo matematinio modelio tyrimas. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **50**:202–207, 2009.

[5] J. Kruopis. *Matematinė statistika.* Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius, 1993.

[6] A. Krylovas and N. Kosareva. Mathematical modelling of forecasting the results of knowlegdge testing. technological and economic development of economy. *Baltic Journal on Sustainability*, **14**(3):388–401, 2008.

[7] G. Rasch. *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests.* Danish Institute for Educational Research, Copenhagen, 1960. Expanded edition: The University of Chicago Press, Chicago, 1980.

[8] V. Stakėnas. *Informacijos kodavimas.* Vilnius, VU, 1996.

SUMMARY

Mathematical model of politomous diagnostical test

A. Krylovas, N. Kosareva

The technology of politomous diagnostic operators as general testing tool creation from the empirical data is proposed. Requirements to diagnostic operators are formulated as a system of axioms. Probability distribution of test result and the amount of test information are calculated according to the proposed technique.

Keywords: measurement, diagnostics operators, probability distribution, mathematical modelling.