LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
58 t., 2017, 51–56

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Periodinių netiesinių svyravimų silpnieji rezonansai

Olga Lavcel-Budko[1], **Aleksandras Krylovas**[2]

[1] *Mykolo Romerio universitetas, Ekonomikos institutas*
Ateities g. 20, LT-08303, Vilnius
[2] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223, Vilnius
E. paštas: olecka@gmail.lt, akr@fm.vgtu.lt

Santrauka. Darbe nagrinėjamas stygos svyravimų netiesinis matematinis modelis su periodiniais pagal erdvinį kintamąjį koeficientais. Taikant dviejų mastelių ir vidurkinimo pagal charakteristikas techniką, konstruojamas neturintis sekuliariųjų narių asimptotinis skleidinys.

Raktiniai žodžiai: asimptotiniai metodai, vidurkinimas, netiesinės bangos, rezonansai.

1 Uždavinio formulavimas

Darbe nagrinėjamas silpnai netiesinių bangų modelis:

$$\frac{\partial r_j}{\partial t} \pm \frac{\partial r_j}{\partial x} = \varepsilon\left(\frac{r_{2x}-r_{1x}}{2}\alpha\cos(\omega x)\right) + \varepsilon^2\left(\frac{r_{2x}-r_{1x}}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}\cos^2(\omega x)\right)\right), \tag{1}$$
$$j=1,2,\ 0<\varepsilon\ll 1.$$

Prie tokio pavidalo uždavinio gali būti pertvarkyta netiesinės stygos svyravimų lygtis, taikant mažojo parametro metodą [2] ir paliekant lygtyje eilės $O(\varepsilon)$ ir $O(\varepsilon^2)$ narius [2]. Taikymuose, tai sudaro dviejų vienmačių netiesiškai sąveikaujančių laukų sistemą. Priklausomai nuo parametro ω ir nuo pradinių sąlygų, sistemoje (1) gali atsirasti kombinaciniai rezonansai. Šio tyrimo objektas yra atvejis, kai sistema neturi rezonansų, jei atmesti eilės $O(\varepsilon^2)$ narius, tačiau juos paliekant, rezonansai atsiranda (mes tokius rezonansus vadiname silpnaisiais).

2 Suvidurkinta sistema

Tolygiai tinkamą ilgajame laiko intervale $t\in[0,O(\varepsilon^{-1})]$ (1) uždavinio asimptotinį sprendinį

$$r_j(t,x;\varepsilon) = V_j^0(\tau,y_j) + \varepsilon\big(W_j^1(\tau,x,y_1,y_2) + V_j^1(\tau,y_j)\big) + O(\varepsilon^2), \quad j=1,2 \tag{2}$$

konstruojame spręsdami suvidurkintąją pagal charakteristikas sistemą [1].

Čia $\tau=\varepsilon t$ – lėtasis laikas, $y_1=x-t$, $y_2=x+t$ – greitieji charakteristiniai kintamieji, $y=(y_1,y_2)$. Vidurkinimo pagal charakteristikas operatoriai apibrėžiami taip:

$$\big\langle f(\tau,x,y)\big\rangle_1 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,x,y_1,y_2)\left[\begin{array}{l} x=y_1+t\\ y_1=y_1\\ y_2=y_1+2t\end{array}\right]dt,$$

$$\big\langle f(\tau,x,y)\big\rangle_2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,x,y_1,y_2)\left[\begin{array}{l} x=y_2-t\\ y_1=y_2-2t\\ y_2=y_2\end{array}\right]dt.$$

Funkcijų $W_j^1(\tau,x,y_1,y_2)$ išvestinės pagal t ir x yra tokios:

$$\frac{\partial W_j^1}{\partial t} = -\frac{\partial W_j^1}{\partial y_1}+\frac{\partial W_j^1}{\partial y_2},\qquad \frac{\partial W_j^1}{\partial x} = \frac{\partial W_j^1}{\partial y_1}+\frac{\partial W_j^1}{\partial y_2}.$$

Funkcijos $r_j(\tau,y_j)$ išvestinė pagal t, kai $\tau=\varepsilon t$, $y_j=x\mp t$:

$$\frac{\partial r_j}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial V_j^0}{\partial\tau}\mp\frac{\partial V_j^0}{\partial y_j}+\varepsilon^2\frac{\partial W_j^1}{\partial\tau}\mp\varepsilon\frac{\partial W_j^1}{\partial y_1}\pm\varepsilon\frac{\partial W_j^1}{\partial y_2}+\varepsilon^2\frac{\partial V_j^1}{\partial\tau}\mp\varepsilon\frac{\partial V_j^1}{\partial y_j},\quad j=1,2.$$

Funkcijos $r_j(\tau,y_j)$ išvestinė pagal x:

$$\frac{\partial r_j}{\partial x} = \frac{\partial V_j^0}{\partial y_j}+\varepsilon\left(\frac{\partial W_j^1}{\partial x}+\frac{\partial W_j^1}{\partial y_1}+\frac{\partial W_j^1}{\partial y_2}+\frac{\partial V_j^1}{\partial y_j}\right),\quad j=1,2.$$

Tada gauname:

$$\frac{\partial r_j}{\partial t}\pm\frac{\partial r_j}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial V_j^0}{\partial\tau}+\varepsilon^2\frac{\partial W_j^1}{\partial\tau}+\varepsilon\left(\frac{\partial W_j^1}{\partial x}\mp 2\frac{\partial W_j^1}{\partial y_{3-j}}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial V_j^1}{\partial\tau},\quad j=1,2.$$

Įrašome gautus reiškinius į (1) sistemą ir surenkame sistemos koeficientus prie vienodų ε laipsnių:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left(\frac{\partial V_1^0}{\partial\tau}+\frac{\partial W_1^1}{\partial x}\mp 2\frac{\partial W_1^1}{\partial y_2}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial W_1^1}{\partial\tau}+\frac{\partial V_1^1}{\partial\tau}\right)\\ &\quad=\frac{\varepsilon}{2}\left(\left(\frac{\partial V_2^0}{\partial y_2}-\frac{\partial V_1^0}{\partial y_1}\right)\alpha\cos(x)\right)+\frac{\varepsilon^2}{8}\left(\left(\frac{\partial V_2^0}{\partial y_2}-\frac{\partial V_1^0}{\partial y_1}\right)\big(\alpha^2\cos^2(x)\big)\right.\\ &\quad\quad\left.+\left(\big(\bigtriangledown W_2^1-\bigtriangledown W_1^1\big)+\left(\frac{\partial V_2^1}{\partial y_2}-\frac{\partial V_1^1}{\partial y_1}\right)\right)\big(4\alpha\cos(x)\big)\right),\end{aligned}\tag{3}$$

čia

$$\bigtriangledown W_j^n = \frac{\partial W_j^n}{\partial x}+\frac{\partial W_j^n}{\partial y_1}+\frac{\partial W_j^n}{\partial y_2},\quad j=1,2.$$

Asimptotinio skleidinio narys $V_j^0(\tau,y_j)$ randamas sprendžiant suvidurkintą sistemą

$$\frac{\partial V_j^0}{\partial\tau} = \big\langle F_j^0\big\rangle_j = \left\langle\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2^0}{\partial y_2}-\frac{\partial V_1^0}{\partial y_1}\right)\alpha\cos(\omega x)\right\rangle_j,\quad j=1,2.\tag{4}$$

Paminėkime vidurkinimo operatorių savybes. Kai $m, k \in N$ ir $m = 2k$ turime:

$$\begin{aligned}
&\big\langle \cos(mx)\sin(ky_2)\big\rangle_1 \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\big(m(y_1+s)\big)\sin\big(k(y_1+2s)\big)ds \\
&\quad = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin\big((m+k)y_1+(m+2k)s\big) - \sin\big((m-k)y_1+(m-2k)s\big)ds \\
&\quad = -\frac{1}{2}\sin(ky_1).
\end{aligned}$$

Panašiai gauname:

$$\begin{aligned}
\big\langle \cos(mx)\cos(ky_2)\big\rangle_1 &= \frac{1}{2}\cos(ky_1), \\
\big\langle \sin(mx)\sin(ky_2)\big\rangle_1 &= -\frac{1}{2}\cos(ky_1), \\
\big\langle \cos(mx)\sin(ky_1)\big\rangle_2 &= -\frac{1}{2}\sin(ky_2), \\
\big\langle \cos(mx)\cos(ky_1)\big\rangle_2 &= \frac{1}{2}\cos(ky_2), \\
\big\langle \sin(mx)\sin(ky_1)\big\rangle_2 &= -\frac{1}{2}\cos(ky_2).
\end{aligned} \tag{5}$$

Visais kitais atvejais, t. y. kai $m \neq 2k$ turėsime nulį.

3 Pavyzdys

Tarkime, kad (1) sistemoje $\omega = 1$, $\alpha = 1$ ir $r_1(0, x; \varepsilon) = \sin(x)$, $r_2(0, x; \varepsilon) = 0$.

Tada iš (4) sistemos gauname $V_1^0(\tau, y_1) = \sin y_1$, $V_2^0(\tau, y_2) = 0$, ir norint sukonstruoti asimptotinio skleidinio (2) antrąjį narį reikia rasti funkcijas $W_j^1(\tau, x, y_1, y_2)$ ir $V_j^1(\tau, y_j)$.

Funkcijos $W_j^1(\tau, x, y_1, y_2)$ surandamos išsprendus sistemą:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial V_1^0}{\partial \tau} + \dfrac{\partial W_1^1}{\partial x} - 2\dfrac{\partial W_1^1}{\partial y_2} = \dfrac{1}{2}\bigg(\bigg(\dfrac{\partial V_2^0}{\partial y_2} - \dfrac{\partial V_1^0}{\partial y_1}\bigg)\alpha\cos(x)\bigg), \\
\dfrac{\partial V_2^0}{\partial \tau} + \dfrac{\partial W_2^1}{\partial x} + 2\dfrac{\partial W_2^1}{\partial y_1} = \dfrac{1}{2}\bigg(\bigg(\dfrac{\partial V_2^0}{\partial y_2} - \dfrac{\partial V_1^0}{\partial y_1}\bigg)\alpha\cos(x)\bigg).
\end{cases} \tag{6}$$

Pritaikius (4) formulę, kai $j = 1, 2$:

$$F_j^0 = \frac{1}{2}\bigg(\bigg(\frac{\partial V_2^0}{\partial y_2} - \frac{\partial V_1^0}{\partial y_1}\bigg)\alpha\cos(x)\bigg) \quad \text{ir} \quad \frac{\partial V_j^0}{\partial \tau} = \big\langle F_j^0\big\rangle_j = \bigg\langle \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial V_2^0}{\partial y_2} - \frac{\partial V_1^0}{\partial y_1}\bigg)\alpha\cos(\omega x)\bigg\rangle_j,$$

gauname

$$\begin{cases}
\big\langle F_j^0\big\rangle_1 + \dfrac{\partial W_1^1}{\partial x} - 2\dfrac{\partial W_1^1}{\partial y_2} = F_1^0, \\
\big\langle F_j^0\big\rangle_2 + \dfrac{\partial W_2^1}{\partial x} + 2\dfrac{\partial W_2^1}{\partial y_1} = F_2^0.
\end{cases} \tag{7}$$

Taigi perrašome (6), (7) ir gauname

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_j^1}{\partial x} \mp 2\frac{\partial W_j^1}{\partial y_2} &= F_j^0 - \langle F_j^0\rangle_j \\ &= \frac{\alpha}{2}\cos(\omega x)\frac{\partial V_2^0(\tau, y_2)}{\partial y_2} - \frac{\alpha}{2}\cos(\omega x)\frac{\partial V_1^0(\tau, y_1)}{\partial y_1} \\ &\quad - \left\langle \frac{\alpha}{2}\cos(\omega x)\frac{\partial V_2^0(\tau, y_2)}{\partial y_2} + \frac{\alpha}{2}\cos(\omega x)\frac{\partial V_1^0(\tau, y_1)}{\partial y_1}\right\rangle_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{8}$$

Kadangi nagrinėjamu nerezonansiniu atveju $\langle F_j^0\rangle_j = 0$, $V_2^0 = 0$, turime

$$\frac{\partial W_j^1}{\partial x} \mp 2\frac{\partial W_j^1}{\partial y_{3-j}} = F_j^0 = -\frac{\alpha}{2}\cos(\omega x)\frac{\partial V_1^0(\tau, y_1)}{\partial y_1}, \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

Kadangi $V_1^0 = \sin y_1$ ir $\alpha = 1$, tai gauname

$$\frac{\partial W_j^1}{\partial x} \mp 2\frac{\partial W_j^1}{\partial y_{3-j}} = -\frac{1}{2}\cos(x)\cos(y_1), \qquad W_j^1(y_j, y_j, y_j) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{10}$$

(10) sistemos sprendinį $W_1^1(\tau, x, y_1, y_2)$ užrašome iš karto:

$$W_1^1 = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(y_1) + \frac{1}{4}\sin(2y_1),$$

o $W_2^1(\tau, x, y_1, y_2)$ sprendinio ieškosime sprendžiant (10) sistemos antrąją lygtį neapibrėžtųjų koeficientu metodu:

$$\begin{aligned} W_2^1 = {} & A_{sc}\sin(x)\cos(y_1) + A_{cc}\cos(x)\cos(y_1) + +A_{cs}\cos(x)\sin(y_1) \\ & + A_{ss}\sin(x)\sin(y_1) + \varphi(y_2). \end{aligned} \tag{11}$$

Turime

$$\begin{aligned} &(A_{cc} - 2A_{ss})\sin(x)\cos(y_1) + (2A_{cc} - A_{ss})\cos(x)\sin(y_1) \\ &\quad - (A_{sc} + 2A_{cs})\cos(x)\cos(y_1) + (2A_{sc} + A_{cs})\sin(x)\sin(y_1) \\ &= -\frac{1}{2}\cos(x)\cos(y_1). \end{aligned}$$

Iš čia

$$A_{cc} - 2A_{ss} = 0, \quad 2A_{cc} - A_{ss} = 0, \quad A_{sc} + 2A_{cs} = \frac{1}{2}, \quad 2A_{sc} + A_{cs} = 0.$$

Turime

$$A_{cc} = A_{ss} = 0, \quad A_{sc} = -\frac{1}{6}, \quad A_{cs} = \frac{1}{3}.$$

Gauname

$$W_2^1 = -\frac{1}{6}\sin(x)\cos(y_1) + \frac{1}{3}\cos(x)\sin(y_1) + \varphi(y_2).$$

$$\varphi(y_2) = \frac{1}{6}\sin(y_2)\cos(y_2) - \frac{1}{3}\cos(y_2)\sin(y_2) = -\frac{1}{6}\sin(y_2)\cos(y_2).$$

Funkcijos $V_j^1(\tau, y_j)$ surandamos iš (3) sistemos, surinkus narius prie ε^2 laipsnių:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_j^1}{\partial \tau} + \frac{\partial V_j^1}{\partial \tau} = {} & \frac{1}{8}\alpha^2 \cos^2(x)\left(\frac{\partial V_2^0}{\partial y_2} - \frac{\partial V_1^0}{\partial y_1}\right) \\
& + \frac{\alpha\cos(x)}{2}\left(\frac{\partial W_2^1}{\partial x} + \frac{\partial W_2^1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_2^1}{\partial y_2} - \frac{\partial W_1^1}{\partial x} - \frac{\partial W_1^1}{\partial y_1} - \frac{\partial W_1^1}{\partial y_2}\right) \\
& + \frac{\alpha\cos(x)}{2}\left(\frac{\partial V_2^1(\tau, y_2)}{\partial y_2} - \frac{\partial V_1^1(\tau, y_1)}{\partial y_1}\right) = F_j^1, \quad j = 1, 2,
\end{aligned} \tag{12}$$

čia funkcijos V_j^0 ir W_j^1 jau yra žinomos:

$$\begin{gathered}
V_1^0 = \sin y_1, \qquad V_2^0 = 0, \\
W_1^1 = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(y_1) + \frac{1}{4}\sin(2y_1), \\
W_2^1 = -\frac{1}{6}\sin(x)\cos(y_1) + \frac{1}{3}\cos(x)\sin(y_1) - \frac{1}{6}\sin(y_2)\cos(y_2).
\end{gathered}$$

Įrašome jas į (12) sistemos lygtis ir atliekame elementarius pertvarkius:

$$\begin{aligned}
F_j^1 = {} & \left(\frac{5}{48} + \frac{5}{48}\cos(2x)\right)\cos(y_1) - \frac{1}{6}\sin(2x)\sin(y_1) - \frac{1}{4}\cos(x)\cos(2y_1) \\
& - \frac{7}{24}\cos(x)\cos(2y_2) + \frac{5}{24}\cos(x) + \frac{\cos(x)}{2}\left(\frac{\partial V_2^1}{\partial y_2} - \frac{\partial V_1^1}{\partial y_1}\right).
\end{aligned}$$

Pritaikius vidurkinimo pagal charakteristikas operatorius ir (6) formules, gauname suvidurkintą sistemą:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial V_1^1}{\partial \tau} = \left\langle \dfrac{1}{2}\cos(x)\dfrac{\partial V_2^1}{\partial y_2} \right\rangle_1, \\[2ex]
\dfrac{\partial V_2^1}{\partial \tau} = \dfrac{5}{96}\cos(2y_2) + \dfrac{1}{12}\cos(2y_2) - \dfrac{1}{2}\left\langle \cos(x)\dfrac{\partial V_1^1}{\partial y_1} \right\rangle_2
\end{cases} \tag{13}$$

su pradinėmis sąlygomis $V_j^1(0, y_j) = 0$, kai $j = 1, 2$.

Matome, kad funkcijos

$$V_1^1 \equiv 0 \quad \text{ir} \quad V_2^1 = \frac{13}{96}\tau\cos(y_2)$$

tenkina (13) sistemą. Taigi išnagrinėto pavyzdžio asimptotinis artinys yra šis:

$$\begin{aligned}
r_1(t, x; \varepsilon) &= \sin(x - t) + \varepsilon\left(-\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x - t) + \frac{1}{4}\sin 2(x - t)\right) + O(\varepsilon^2), \\
r_2(t, x; \varepsilon) &= \varepsilon\left(-\frac{1}{6}\sin(x)\cos(x - t) + \frac{1}{3}\cos(x)\sin(x - t)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{6}\sin(x + t)\cos(x + t) + \frac{13\varepsilon t}{96}\cos 2(x + t)\right) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{14}$$

4 Išvados

Pateikta straipsnyje asimptotinio integravimo metodika leidžia konstruoti tolygiai tinkamo ilgajame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$ asimptotinio skleidinio aukštesnės eilės narius. Taip galima aptikti antrosios ir aukštesnių eilių periodinių svyravimų rezonansinę sąveiką (silpnuosius rezonansus). Tai galėtų būti įdomu, pavyzdžiui, muzikiniu instrumentu, kietojo kūno, skysčių, dujų ir net plazmos subtilesniu svyravimo savybių tyrimui.

Literatūra

[1] A. Krylovas. Dviejų silpnai netiesinių lygčių dalinėmis išvestinėmis hiperbolinės sistemos asimptotinis integravimas. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser B*, **57**:31–36, 2016.

[2] A. Krylovas, O. Lavcel-Budko and P. Miškinis. Asymptotic solution of the mathematical model of nonlinear oscillations of absolutely elastic inextensible weightless string. *Nonlinear Anal., Model. Control*, **15**(3):307–323, 2010.

SUMMARY

Weak resonances of periodical nonlinear oscillations
O. Lavcel-Budko, A. Krylovas

The mathematical model of nonlinear oscillations of weightless string is analyzed. Coefficients of the mathematical model and initial conditions are periodical functions of the space variable. A multiscale perturbation technique and integrating along characteristics are used to construct asymptotic solution without secular members.

Keywords: resonance, asymptotic methods, nonlinear waves, averaging.