

TOPSIS metodo jautrumas normalizavimo taisyklių atžvilgiu

Rūta Simanavičienė

Vilniaus Gedimino technikos universiteto, Matematinės statistikos katedra
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: ruta.simanaviciene@vgtu.lt

Santrauka. Daugumoje daugiakriterinių sprendimo priėmimo metodų, rodiklių reikšmes numatyta pertvarkyti į bedimensius dydžius. Šis pertvarkymas atliekamas taikant atitinkamas normalizavimo taisykles. Yra pastebėta, jog kai kuriuose daugiakriteriniuose metoduose yra naudojamos skirtingos normalizavimo taisyklės. Atliekant praktinius skaičiavimus pastebėta, jog taikant skirtingas normalizavimo taisykles tuose pačiuose daugiakriteriniuose metoduose gaunamos nevienodos alternatyvų prioritetinės eilutės, su tais pačiais duomenimis. Atsižvelgiant į tai, šio straipsnio tikslas, atlikti normalizavimo metodų įtakos alternatyvų rangavimui, tyrimą. Bei išsiaiškinti kokioms sąlygoms esant normalizavimo taisyklės keičia alternatyvų rangavimą.

Raktiniai žodžiai: daugiakriteriniai sprendimo priėmimo metodai, normalizavimas, statistinė analizė, monotoninės transformacijos.

Įvadas

Daugumoje daugiakriterinių sprendimo priėmimo metodų, rodiklių reikšmes numatyta pertvarkyti į bedimensius dydžius. Šis pertvarkymas atliekamas taikant atitinkamus normalizavimo būdus (formules). Atliekant literatūros analizę yra pastebėta, jog tuose pačiuose daugiakriteriniuose metoduose yra naudojamos skirtingos normalizavimo formulės.

Vienas iš paprasčiausių ir dažniausiai taikomų daugiakriterinių metodų yra SAW (angl. *Simple Additive Weighting*) [5]. Metode SAW numatyta tiesinė pradinių duomenų normalizacija, kai pagal atskiras formules normalizuojami minimizuojami bei maksimizuojami rodikliai. Tačiau yra darbų, kuriuose SAW metode taikoma viena tiesinio normalizavimo *Sum* formulė [4]. Be tiesinio normalizavimo formulių yra siūloma taikyti ir netiesinio normalizavimo formules. 2008 m. buvo pasiūlytos logaritminio normalizavimo formulės, kurios buvo taikomos matricinių lošimų optimalių strategijų apskaičiavimo taisyklėms [8]. Šiame darbe autoriai lygina vektorinio normalizavimo, tiesinio normalizavimo (*Min-Max* ir *Korth-Juttler*) ir netiesinio normalizavimo (Peldschus bei logaritminio) formulių įtaką alternatyvų prioritetinei eilutei. Autoriai rekomenduoja logaritminį normalizavimą taikyti tuo atveju, kai rodiklių reikšmės žymiai skiriasi. Yra darbų, kuriuose tiems patiems metodams taikomos kelios normalizacijos, po to lyginami gauti rezultatai. 2014 m. metode TOPSIS (angl. *Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution*) buvo taikoma tiesinės normalizacijos formulės: *Min-Max*, *Max*, *Sum* ir vektorinė normalizacija [1]. Šio tyrimo rezultatai parodė, kad vektorinė normalizacija geriausiai generuoja neprieštarigus (angl.

Consistent) rezultatus. 2015 m. skirtingos normalizavimo formulės buvo taikomos šiems daugiakriterinio vertinimo metodams: WSM (angl. *The Weighted Sum Model*), WPM (angl. *The Weighted Product Model*), TOPSIS ir PROMETHEE II (angl. *The Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation*) [6]. Šiems metodams buvo pritaikytos tiesinio normalizavimo formulės: *Street (Manhattan)*, *Max*, *Min–Max*, *Korth–Juttler* ir netiesinės: Peldschus ir logaritminio normalizavimo bei vektorinio normalizavimo formulės. Tyrimo rezultatai parodė, kad PROMETHEE II metodas mažiausiai jautrus normalizavimo įtakai. Kai tuo tarpu WSM, WPM ir TOPSIS metodai labai jautrūs normalizavimo formulių parinkimui.

Atlikus susijusių darbų analizę pastebėta, kad normalizavimo formulių parinkimo daugiakriteriniams metodams klausimas yra nagrinėjamas daugelio autorių. Normalizavimo formulių įvairovė didelė. Dažniausiai normalizavimo formulių įtaka daugiakriterinių metodų rezultatams analizuojama tik konkretaus pavyzdžio atveju, netaikant imitacinio modeliavimo.

Šiame straipsnyje nagrinėjama šešių normalizavimo formulių įtaka TOPSIS metodo rezultatams. Numatytam tyrimui atlikti, pagal praktinio uždavinio duomenis, sugeneruojama sprendimo matricių aibė, kuri naudojama normalizavimo formulių įtakos, TOPSIS metodo rezultatams, tyrime. Tyrimo rezultatų analizei taikomas Vilkoksono kriterijus priklausomoms imtims, norint nustatyti, ar skirtingos normalizacijos keičia TOPSIS metodo rezultatus (alternatyvų rangavimą), ar ne.

1 Normalizacija daugiakriteriniuose methoduose

Jeigu tyrimo rodikliai matuojami skirtingais matavimo vienetais, tai prieš pradėdant skaičiavimus (alternatyvų rangavimo procedūrą) būtina duomenis transformuoti, tam kad būtų suvienodintos kintamųjų dimensijos.

Statistikoje duomenų normalizavimas turi keletą prasmių. Viena iš jų yra duomenų pertvarkymas, kurio metu tyrimo duomenys, pateikti skirtingais matavimo vienetais, pertvarkomi į bedimensius, tarpusavyje palyginamus, dydžius. Tačiau tai nebūtinai reiškia, jog normalizuotos reikšmės turės normalųjį pasiskirstymą [3]. Daugiakriteriniuose methoduose atributų reikšmių – rodiklių, pertvarkymui į bedimensius dydžius taikomos metode numatytos normalizavimo taisyklės. Vienas iš pagrindinių rodiklių normalizavimo reikalavimų – rodiklių transformacija turi būti monotonišė. Rodiklių normalizavimui daugiakriteriniuose methoduose taikomos tiesinės, netiesinės ir vektorinės transformacijos.

Skaičių rinkiniui a_1, a_2, \dots, a_n atliekant vektorinę transformaciją, toks skaičių rinkinys užrašomas n -mačiu vektoriumi $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Vektorinė transformacija yra vektoriaus \vec{a} pakeitimas jo ortu \vec{a}^o .

Kai kuriuose daugiakriteriniuose methoduose minimizuojami ir maksimizuojami rodikliai normalizuojami bendrai, kaip COPRAS, TOPSIS methoduose. Kituose methoduose minimizuojami ir maksimizuojami rodikliai normalizuojami atskirai, kaip SAW, VIKOR. Yra darbų, kuriuose atskirai normalizuojami rodikliai ir TOPSIS metode [1].

Šiame darbe bus nagrinėjamas tik TOPSIS metodas, kai rodikliai normalizuojami bendrai. Bus tikrinama šešių, antrajame skyriuje aprašytų normalizavimo taisyklių įtaka TOPSIS rezultatams. TOPSIS metode numatyta viena normalizavimo formulė, pagal kurią normalizuojami tiek minimizuojami rodikliai, tiek maksimizuojami. Tokiu atveju norint TOPSIS methodui šiame darbe taikyti kitas normalizacijas, reikia naudoti maksimizuojamų rodiklių normalizavimo formules.

2 Tyrimui naudojamos normalizavimo taisyklės

Tarkim turim n atributų R_1, R_2, \dots, R_n , pagal kuriuos vertinama m nagrinėjamų alternatyvų A_1, A_2, \dots, A_m . Sudaroma atributų reikšmių – rodiklių, pagal visas alternatyvas, sprendimo matrica $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

1 lentelė. Darbe taikomos normalizavimo taisyklės.

Taisyklės pavadinimas	Formulė	Pastabos
Vektorinė	$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\ X_j\ }$	(1) Čia $\ X_j\ $ yra vektoriaus X_j norma n -matėje Euklidinėje erdvėje. Normalizuotos reikšmės aprėžtos intervale (0; 1) [5].
Tiesinė (Sum)	$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}}$	(2) Normalizuotos reikšmės aprėžtos intervale (0; 1) [4].
Netiesinė (logaritminė)	$\bar{x}_{ij} = \frac{\ln(x_{ij})}{\ln(\prod_{i=1}^m x_{ij})}$	(3) Normalizuotos reikšmės aprėžtos intervale (0; 1) [8].
Tiesinė (Max)	$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_i x_{ij}}$	(4) Normalizuotos reikšmės aprėžtos intervale (0; 1) [1].
Netiesinė (Peldschus)	$\bar{x}_{ij} = \left(\frac{x_{ij}}{\max_i x_{ij}}\right)^2$	(5) Normalizuotos reikšmės aprėžtos intervale (0; 1) [7].
Tiesinė (Min–Max)	$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}$	(6) Atliekant šią normalizaciją didžiausia rodiklio reikšmė pertvarkoma į 1, mažiausia į 0. Normalizuotos reikšmės aprėžtos intervale [0; 1] [1].

3 Metodo TOPSIS algoritmas

Metodas TOPSIS vadinamas variantų racionalumo nustatymu artumo idealiajam taškui metodu. Alternatyvų prioritetiškumo nustatymo metodika, pagrįsta koncepcija, kad optimalaus varianto atstumas iki labiausiai geidžiamo varianto yra mažiausias, o iki nepageidaujamo varianto – didžiausias [5].

TOPSIS metodo algoritmą sudaro 7 žingsniai:

1. Pradžioje apibrėžiami pradiniai duomenys: tai sprendimų matrica X ir rodiklių reikšmingumų vektorius $q = \{q_j\}$ ($j = \overline{1, n}$).
2. Taikant metodą TOPSIS, sprendimų matrica X normalizuojama taikant vektorinės normalizacijos formulę (1) ir taip gaunama normalizuota sprendimų matrica $\bar{X} = (\bar{x}_{ij})$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).
3. Dauginant normalizuotos sprendimų matricos elementus \bar{x}_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) iš atitinkamų rodiklių reikšmingumų, gaunama svertinė normalizuota sprendimų matrica $V = (v_{ij})$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).
4. Sudaromas „geriausios įmanomos“ alternatyvos modelis A^+ , kurios elementai nustatomi pagal formulę:

$$A^+ = \left\{ \left(\max_i v_{ij} \mid j \in J \right), \left(\min_i v_{ij} \mid j \in J' \right) \mid i = \overline{1, m} \right\}, \quad (7)$$

čia J – rodiklių, kurių didesnės reikšmės yra geresnės, indeksų aibė; J' – rodiklių, kurių mažesnės reikšmės yra geresnės, indeksų aibė.

5. Sudaromas „blogiausios įmanomos“ alternatyvos modelis A^- , kurios elementai nustatomi pagal formulę:

$$A^- = \left\{ \left(\min_i v_{ij} \mid j \in J \right), \left(\max_i v_{ij} \mid j \in J' \right) \mid i = \overline{1, m} \right\}. \quad (8)$$

6. n -matėje Euklidinėje erdvėje skaičiuojami atstumai L_i^+ ir L_i^- ($i = \overline{1, m}$), nuo i -tosios alternatyvos A_i ($i = \overline{1, m}$) atitinkamai iki „geriausios įmanomos“ A^+ , bei „blogiausios įmanomos“ A^- ,
7. Galutiniu TOPSIS metodo žingsniu nustatomas kiekvienos i -osios alternatyvos santykinis atstumas iki „blogiausios įmanomos“ alternatyvos A^- :

$$K_i = \frac{L_i^-}{L_i^+ + L_i^-}, \quad i = \overline{1, m}, \text{ kai } K_i \in [0, 1]. \quad (9)$$

Racionalus variantas bus tas, kurio K_i reikšmė yra didžiausia [5].

4 Normalizavimo įtakos TOPSIS metodo rezultatams tyrimas

Normalizavimo įtakos tyrimas susideda iš dviejų etapų: I – normalizavimo taisyklių analizė tolygių pseudoatsitiktinių skaičių sekai ($n = 30$). Šiai skaičių sekai atliktos šešios normalizacijos ir stebimos normalizuotų sekų sklaidos charakteristikos; II – TOPSIS metode keičiant normalizavimo taisykles (aprašytas aukščiau), gautiems rezultatams atliekama statistinė analizė. II tyrimo etapas susideda iš šių žingsnių:

1. Formuluojamas daugiakriterinis sprendimo priėmimo uždavinys, kurį sudaro nagrinėjamų alternatyvų aibė $A = \{A_i: i = \overline{1, m}\}$ ir atributų aibė $R = \{R_j: j = \overline{1, n}\}$.
2. Sudaroma sprendimų matrica: $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), čia x_{ij} i -tosios alternatyvos j -tojo rodiklio kiekybinis įvertis.
3. Remiantis rodiklių reikšmėmis x_{ij} , apskaičiuojami kiekvienos reikšmės intervalai $[x_{ij} \cdot 0, 9; x_{ij} \cdot 1, 1]$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), kuriuose bus generuojama kiekvieno rodiklio tolygių pseudoatsitiktinių dydžių seka x_{ij}^k ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, K}$) po K elementų.
4. Iš sugeneruotų reikšmių sudaroma K sprendimo matricių: $X_k = (x_{ij}^k)$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, K}$).
5. Norint patikrinti normalizavimo taisyklių įtaką TOPSIS metodo rezultatams, pasirenkami vienodo dydžio rodiklių reikšmingumai.
6. Atitinkamai taikant vieną iš šešių normalizavimo taisyklių TOPSIS metode, pagal TOPSIS metodo algoritmą atliekami skaičiavimai su visomis K sprendimo matricėmis $X_k = (x_{ij}^k)$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, K}$).
7. Skaičiavimo rezultatai pateikiami kaip imtys $A^k = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_m^k)$ ($k = \overline{1, K}$), kurių elementai yra TOPSIS metodo kriterijaus reikšmės kiekvienai alternatyvai.
8. Atsižvelgiant į TOPSIS metodo kriterijaus reikšmes a_i^k ($i = \overline{1, m}, k = \overline{1, K}$), kiekvienai alternatyvai, alternatyvos ranguojamos – didžiausiai reikšmei priskiriant rangą 1, mažiausiai – rangą m . Taip gaunamos ranginių duomenų imtys.
9. Atliekama rezultatų – ranginių duomenų, statistinė analizė.

Remiantis tuo, kad normalizavimo įtaka buvo stebima naudojant tas pačias sprendimo priėmimo matricas ir tą patį TOPSIS algoritmą, daroma prielaida, jog atitinkamų alternatyvų A_i , $i = \overline{1, m}$, ranginių duomenų imtys, gautos keičiant normalizacijas yra priklausomos. Atsižvelgiant į pateiktą prielaidą, normalizavimo įtakos statistinei analizei atlikti bus taikomas Vilkoksono ženklų kriterijus priklausomoms imtims,

kuriuo norima patikrinti, ar skirtingų normalizacijų įtakotų TOPSIS rezultatų imčių skirstiniai sutampa.

Vilkoksono ženklų kriterijus priklausomoms imtims (didelių imčių atveju):

Duomenys. Stebima tolydžiųjų kintamųjų pora (A_i^{vekt}, A_i^r) , kur indeksas *vekt* – reiškia, jog alternatyvų rangavimas gautas TOPSIS metodu taikant vektorinę normalizaciją, indeksas *r* – normalizavimo taisyklės numeris, kuri buvo taikoma TOPSIS metode. Duomenys $((b_{i1}^{vekt}, b_{i1}^r), (b_{i2}^{vekt}, b_{i2}^r), \dots, (b_{iK}^{vekt}, b_{iK}^r))$, *i*-tosios alternatyvos rangų gautų taikant TOPSIS algoritme vektorinę normalizaciją (A_i^{vekt}) ir *r*-tąją normalizaciją (A_i^r) , čia $r = \{Sum, Log, Max, Peld, Min-Max\}$.

Statistinė hipotezė: $\begin{cases} H_0 : A_i^{vekt} \text{ ir } A_i^r \text{ skirstiniai vienodi,} \\ H_1 : A_i^{vekt} \text{ ir } A_i^r \text{ skirstiniai nevienodi.} \end{cases}$

Išvada. Skirstiniai skiriasi, jeigu *p*-reikšmė $p < \alpha$; skirstiniai nesiskiria, jeigu $p \geq \alpha$, čia reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.05$ [2].

5 Normalizavimo taisyklių tyrimas

5.1 I tyrimo etapo rezultatai

Normalizavimo formulių įtakos analizei, buvo sugeneruota 30 tolygaus pseudoatsitiktinio dydžio reikšmių imtis. Atlikus šios imties elementų normalizavimą, buvo stebimos sklaidos charakteristikos: standartinis nuokrypis, variacijos koeficientas, bei imties plotis. Gauti rezultatai pateikti 2-oje lentelėje.

Ši normalizavimo formulių analizė parodė, kad tiesinis Sum ir netiesinis – logaritminis normalizavimas pradinius duomenis transformuoja taip, kad gautų normalizuotų reikšmių imčių sklaidos charakteristikos yra artimos. Taikant vektorinę, Sum, logaritminę ir Max normalizacijas, normalizuotų reikšmių sklaida yra artima pradinių duomenų sklaidai. Tuo atveju Peldschus ir Min–Max normalizacijos žymiai padidina normalizuotų reikšmių sklaidą, lyginant su pradiniai duomenimis.

5.2 II tyrimo etapo rezultatai

Remiantis Vilkoksono testu gautomis *p*-reikšmėmis (3 lentelė), daromos išvados apie normalizavimo taisyklių įtaką TOPSIS rezultatams: a) alternatyvų rangavimai gauti TOPSIS metodu, taikant vektorinę normalizaciją ir taikant tiesinę Sum normalizaciją sutampa; b) alternatyvų rangavimai gauti TOPSIS metodu, taikant vektorinę ir taikant tiesinę Min–Max normalizacijas nesutampa.

2 lentelė. Maksimizuojamų rodiklių normalizuotų sekų sklaidos skaitinės charakteristikos.

Normalizavimo taisyklė	Sklaidos charakteristikos		
	Standartinis nuokrypis	Variacijos koeficientas	Imties plotis
<i>Pradiniai duomenys</i>	2,519	49,11%	8,469
Vektorinis	0,081	49,11%	0,271
Tiesinis (Sum)	0,016	49,11%	0,055
Netiesinis – logaritminis	0,013	39,25%	0,048
Tiesinis (Max)	0,263	49,11%	0,884
Netiesinis – Peldschus	0,298	84,28%	0,986
Tiesinis (Min–Max)	0,297	62,77%	1

3 lentelė. Vilkoksono kriterijaus p reikšmės alternatyvoms.

Vektorinę lyginant su:	A_1	A_2	A_3	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
Tiesinė Min–Max	$3,62 \times 10^{-7}$	$7,67 \times 10^{-11}$	$2,2 \times 10^{-16}$	0,002	$9,80 \times 10^{-9}$	$9,59 \times 10^{-16}$	$1,82 \times 10^{-8}$	$2,2 \times 10^{-16}$	$2,2 \times 10^{-16}$
Tiesinė Max	0,043	0,003	0,0003	0,581	0,221	0,043	$1,21 \times 10^{-5}$	$1,59 \times 10^{-5}$	$7,97 \times 10^{-9}$
Tiesinė Sum	0,416	0,416	0,392	–	0,321	0,741	0,05	0,609	0,111
Peldschus	0,013	0,009	$6,66 \times 10^{-7}$	$5,99 \times 10^{-5}$	$7,42 \times 10^{-9}$	0,096	$2,2 \times 10^{-16}$	$2,47 \times 10^{-13}$	$2,2 \times 10^{-16}$
Logaritminių	$3,76 \times 10^{-8}$	$2,2 \times 10^{-16}$	$2,2 \times 10^{-16}$	$2,2 \times 10^{-16}$	0,085	0,0003	0,002	$2,2 \times 10^{-16}$	$2,2 \times 10^{-16}$

Bendros tyrimo išvados

1. Atlikus normalizavimo taisyklių analizę, pastebėta, jog taikant tiesines Max, Min–Max ir netiesinę Peldschus normalizacijas normalizuotų duomenų imties pločiai yra artimi 1, t. y. žymiai didesni, nei taikant tiesinę Sum, vektorinę, ar netiesinę logaritminę normalizacijas.
2. TOPSIS metodui taikant vektorinę ir tiesinę Sum normalizacijas gautas alternatyvų rangavimas sutampa, tai patvirtina Vilkoksono testas.
3. Nors taikant netiesinę logaritminę normalizavimą, normalizuotų reikšmių sklaidos charakteristikos buvo artimos normalizuotų reikšmių, pagal tiesinę Sum normalizavimą, tačiau TOPSIS metodu gautų alternatyvų rangavimai nesutapo, remiantis Vilkoksono testo rezultatais.

Literatūra

- [1] A. Celen. Comparative analysis of normalization procedures in TOPSIS method: wit an application to Turkish deposit banking market. *Informatica*, **25**(2):185–208, 2014.
- [2] V. Čekanavičius ir G. Murauskas. *Statistika ir jos taikymai II*. TEV, Vilnius, 2004. 272 pp.
- [3] Y. Dodge. *The Oxford Dictionary of Statistical Terms*, 2003.
- [4] R. Ginevičius ir V. Podvezko. Daugiakriterinio vertinimo taikymo galimybės kiekybiniam socialinių reiškinių vertinimui. *Verslas: teorija ir praktika*, **9**(2):81–87, 2008.
- [5] C.L. Hwang and K. Yoon. *Multiple Attribute Decision Making – Methods and Applications. A State of the Art Survey*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981. 250 pp.
- [6] M. Kaftanowicz and M. Krzeminski. Multiplecriteria analysis of plasterboard systems. *Proc. Eng.*, **111**:364–370, 2015.
- [7] F. Peldschus. The effectiveness of assessment in multiple criteria decisions. *Int. J. Manag. Dec. Mak.*, **8**(6):519–526, 2007.
- [8] E.K. Zavadskas and Z. Turskis. A new logarithmic method in game theory. *Informatica*, **19**(2):303–311, 2008.

Literatūra

SUMMARY

The sensitivity of method TOPSIS with respect to the normalization rules

R. Simanavičienė

In the most multiple attribute decision making methods the attribute values are provided to transform into one dimension. The normalization of attribute values is not always needed, but it may be essential. This restructuring is carried out in accordance with appropriate normalization rules. It has been observed that some of multiple attribute methods are used for different normalization

rules. In practical calculations it noted that using different normalization rules in the same multiple attribute method produces different alternatives priority line, with the same data. Due to the fact of this paper is to carry out normalization methods affect the ranking of alternatives, study. And find out under what conditions the normalization rules change the ranking of alternatives.

Keywords: multiple attribute decision making methods, normalization, statistical analysis, monotonic transformation.