LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS ISSN 0132-2818
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B www.mii.lt/LMR/
57 t., 2016, 31–36

Dviejų silpnai netiesinių lygčių dalinėmis išvestinėmis hiperbolinės sistemos asimptotinis integravimas

Aleksandras Krylovas

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: akr@fm.vgtu.lt

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjama dviejų silpnai netiesinių lygčių hiperbolinė sistema su periodiniais pagal erdvinį kintamąjį koeficientais. Taikant dviejų mastelių ir vidurkinimo pagal charakteristikas techniką konstruojama neturinti sekuliariųjų narių asimptotinė eilutė. Bendroji asimptotinio integravimo metodika pritaikyta netiesinės nehomogeninės stygos svyravimų asimptotinei analizei

Raktiniai žodžiai: asimptotiniai metodai, vidurkinimas, banginė lygtis, rezonansai.

Įvadas

Straipsnyje nagrinėjama dviejų pirmosios eilės hiperbolinė sistema su mažuoju teigiamu parametru ε:

$$\begin{cases} D_j r_j \equiv \dfrac{\partial r_j}{\partial t} \pm \lambda \dfrac{\partial r_j}{\partial x} \\ \qquad = \varepsilon\left(f_{j0}(x, r_1, r_2; \varepsilon) + f_{j1}(x, r_1, r_2; \varepsilon)\dfrac{\partial r_1}{\partial x} + f_{j2}(x, r_1, r_2; \varepsilon)\dfrac{\partial r_2}{\partial x}\right), \\ j = 1, 2. \end{cases} \tag{1}$$

Kai $\varepsilon = 0$, (1) sistema aprašo dvi tiesines nepriklausomas bangas, bėgančias į skirtingas puses su greičiu λ. Jei $\varepsilon > 0$, sistema aprašo bangų sąveiką, kuri pasireiškia ilgajame laiko intervale $t \sim \varepsilon^{-1}$. Į (1) pavidalo sistemą pertvarkomos netiesinių nehomogeninių stygų svyravimo lygtys. Straipsnyje pateikta (1) sistemos bendroji asimptotinės analizės schema. Atskiras tokios analizės atvejis buvo išnagrinėtas straipsniuose [1, 2].

1 Asimptotinės eilutės konstravimas

Pažymėkime $\tau = \varepsilon t$, $y_1 = x - \lambda t$, $y_2 = x + \lambda t$ ir (1) sistemos asimptotinio sprendinio ieškosime tokios asimptotinės eilutės pavidalu:

$$r_j(t, x; \varepsilon) = v_j^{(0)}(\tau, y_j) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \big(v_j^{(n)}(\tau, y_j) + w_j^{(n)}(\tau, x, y_1, y_2) \big). \tag{2}$$

Įrašę (2) į (1), skleidžiame sistemos dešines puses ε laipsnių eilute ir perrašome ją taip:

$$\begin{aligned} D_j r_j &= \varepsilon \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left(\varepsilon \left(\frac{\partial v_j^{(n)}}{\partial \tau} + \frac{\partial w_j^{(n)}}{\partial \tau} \right) + \mathcal{D}_j w_j^{(n)} \right) \\ &= \varepsilon \left(f_{j0}^{(0)} + f_{j1}^{(0)} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial y_1} + f_{j2}^{(0)} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial y_2} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \left(f_{j0}^{(n)} + f_{j1}^{(n)} \left(\frac{\partial v_1^{(n)}}{\partial y_1} + \nabla w_1^{(n)} \right) + f_{j2}^{(n)} \left(\frac{\partial v_2^{(n)}}{\partial y_2} + \nabla w_2^{(n)} \right) \right), \end{aligned} \tag{3}$$

čia

$$\mathcal{D}_1 w_1^{(n)} \equiv \lambda \frac{\partial w_1^{(n)}}{\partial x} + 2\lambda \frac{\partial w_1^{(n)}}{\partial y_2}, \qquad \mathcal{D}_2 w_2^{(n)} \equiv -\lambda \frac{\partial w_2^{(n)}}{\partial x} - 2\lambda \frac{\partial w_2^{(n)}}{\partial y_1},$$
$$\nabla w_j^{(n)} = \frac{\partial w_j^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial w_j^{(n)}}{\partial y_1} + \frac{\partial w_j^{(n)}}{\partial y_2}.$$

Prilyginame (3) reiškinių koeficientus prie vienodų ε laipsnių:

$$\varepsilon^1 : \ \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \tau} + \mathcal{D}_j w_j^{(1)} = f_{j0}^{(0)} + f_{j1}^{(0)} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial y_1} + f_{j2}^{(0)} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial y_2}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n+1} : \ \frac{\partial v_j^{(n)}}{\partial \tau} + \mathcal{D}_j w_j^{(n+1)} = F_j^{(n)} &\equiv -\frac{\partial w_j^{(n)}}{\tau} + f_{j0}^{(n)} \ f_{j1}^{(n)} \left(\frac{\partial v_1^{(n)}}{\partial y_1} + \nabla w_1^{(n)} \right) \\ &\quad + f_{j2}^{(n)} \left(\frac{\partial v_2^{(n)}}{\partial y_2} + \nabla w_2^{(n)} \right), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{5}$$

Sistemą (1) papildysime periodinėmis pradinėmis sąlygomis

$$r_j(0, x; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n r^{(n)}(x), \qquad r^{(n)}(x + 2\pi) \equiv r^{(n)}(x), \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

Suformuluokime uždavinius (2) asimptotinio skleidinio koeficientams ieškoti. Apibrėžkime vidurkinimo išilgai charakteristikų operatorius:

$$\begin{aligned} \big\langle f(\tau, x, y_1, y_2) \big\rangle_1 &\equiv \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} f(\tau, y_1 + \lambda s, y_1, y_1 + 2\lambda s)\, ds, \\ \big\langle f(\tau, x, y_1, y_2) \big\rangle_2 &\equiv \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} f(\tau, y_2 - \lambda s, y_2 - 2\lambda s, y_2)\, ds. \end{aligned} \tag{7}$$

Funkcijas $v_j^{(0)}$ randame, kaip tokio Koši uždavinio sprendinį:

$$\frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \tau} = \left\langle f_{j0}^{(0)} + f_{j1}^{(0)} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial y_1} + f_{j2}^{(0)} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial y_2} \right\rangle_j, \qquad v_j^{(0)}(0, y_j) = r_j^{(0)}(y_j). \tag{8}$$

Funkcijas $w_j^{(1)}$ randame iš (4) lygybės ir tokių papildomų sąlygų:

$$\mathcal{D}_j w_j^{(1)} = F_j^{(0)} - \langle F_j^{(0)} \rangle_j, \qquad w_j^{(1)}(\tau, y_j, y_j, y_j) = 0. \tag{9}$$

Tarkime, kad visos (1) sistemos funkcijos f_{ji} yra periodinės pagal kintamąjį x su periodu 2π. Tada sistemos (9) dešinė pusė užrašoma Furjė eilute

$$F_j^{(0)} = \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{Z}^3} F_{j\mathbf{l}}^{(0)}(\tau) e^{\mathbf{i}(l_0 x + l_1 y_1 + l_2 y_2)}, \quad \mathbf{i} = \sqrt{-1},\ \mathbf{l} = (l_0, l_1, l_2). \tag{10}$$

Pastebėję, kad

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \tau} &= \langle F_1^{(0)} \rangle_1 = \sum_{\mathbf{l}\colon \lambda l_0 + 2\lambda l_2 = 0} F_{1\mathbf{l}}^{(0)}(\tau) e^{\mathbf{i}(l_0 x + l_1 y_1 + l_2 y_2)}, \\ \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \tau} &= \langle F_2^{(0)} \rangle_2 = \sum_{\mathbf{l}\colon -\lambda l_0 - 2\lambda l_1 = 0} F_{2\mathbf{l}}^{(0)}(\tau) e^{\mathbf{i}(l_0 x + l_1 y_1 + l_2 y_2)}, \end{aligned} \tag{11}$$

gauname

$$\begin{aligned} w_1^{(1)}(\tau, x, y_1, y_2) &= \sum_{\mathbf{l}\colon \lambda l_0 + 2\lambda l_2 \neq 0} \frac{F_{1\mathbf{l}}^{(0)}(\tau)}{\mathbf{i}\lambda(l_0 + 2l_2)} \big(e^{\mathbf{i}(l_0 x + l_1 y_1 + l_2 y_2)} - e^{\mathbf{i}(l_0 + l_1 + l_2) y_1}\big), \\ w_2^{(1)}(\tau, x, y_1, y_2) &= \sum_{\mathbf{l}\colon -\lambda l_0 - 2\lambda l_1 \neq 0} \frac{F_{2\mathbf{l}}^{(0)}(\tau)}{\mathbf{i}\lambda(-l_0 - 2l_1)} \big(e^{\mathbf{i}(l_0 x + l_1 y_1 + l_2 y_2)} - e^{\mathbf{i}(l_0 + l_1 + l_2) y_2}\big). \end{aligned} \tag{12}$$

Taigi galime suformuluoti rekurentinius sąryšius visoms funkcijoms $w_j^{(n)}$, $v_j^{(n)}$, kai $n = 1, 2, \ldots$, ieškoti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j^{(n)}}{\partial y_j} &= \langle F_j^{(n)} \rangle_j, \qquad v_j^{(n)}(0, y_j) = r_j^{(n)}(y_j), \\ \mathcal{D}_j w_j^{(n+1)} &= F_j^{(n)} - \langle F_j^{(n)} \rangle_j, \qquad w_j^{(n+1)}(\tau, y_j, y_j, y_j) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

2 Nehomogeninės stygos svyravimai

Gerai žinoma nehomogeninės stygos tiesinė svyravimų lygtis

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{14}$$

galioja, kai daroma prielaida, kad jos profilio $u(t, x)$ pokyčiai

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha, \tag{15}$$

čia t – laikas, x – erdvinė koordinatė, ρ – stygos tankis, T – įtempimo jėga.

Kai (15) prielaidos negalioja, tai $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}$ ir stygos profilio $u(t,x)$ pokyčiai aprašomi antrosios eilės netiesine lygtimi

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T(x)\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\right). \tag{16}$$

Lygties (16) tyrimui taikome mažojo parametro metodą:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \xi(\varepsilon)\tilde{u}\,(t,x), \quad 0 < \xi(\varepsilon) \ll 1,\\ \rho(x) &= \rho_0 + \mu(\varepsilon)\,\tilde{\rho}(x), \quad 0 \leqslant \mu(\varepsilon) \ll 1,\\ T(x) &= T_0 + \nu(\varepsilon)\,\tilde{T}(x), \quad 0 \leqslant \nu(\varepsilon) \ll 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Iš (16) ir (2) gauname

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\nu\frac{d\tilde{T}(x)}{dx}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + (T_0 + \nu\tilde{T}(x))\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}}{(\rho_0 + \mu\tilde{\rho}(x))\sqrt{\left(1+\left(\xi\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)^2\right)^3}}. \tag{18}$$

Skleidžiame (18) mažųjų parametrų laipsniais:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}\\ &\quad = \frac{\nu}{\rho_0}\left(\frac{d\tilde{T}(x)}{dx}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \tilde{T}(x)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}\right) - \frac{\mu T_0}{\rho_0^2}\tilde{\rho}(x)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}\\ &\qquad - \frac{3\xi^2 T_0}{2\rho_0}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{\mu\nu}{\rho_0^2}\left(\frac{d\tilde{T}(x)}{dx}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \tilde{T}(x)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}\right)\tilde{\rho}(x) + \cdots \end{aligned} \tag{19}$$

Pažymėkime $\lambda^2 = \frac{T_0}{\rho_0}$, $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, $w = \frac{\partial u}{\partial x}$. Tada (19) lygtį perrašome taip:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial t} - \lambda^2\frac{\partial w}{\partial x} = F(w;\nu,\mu,\xi) + G(w;\nu,\mu,\xi)\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{20}$$

Taigi iš (19) ir (20) gauname (1) pavidalo sistemą Rymano invariantais $r_1 = v - \lambda w$, $r_2 = v + \lambda w$:

$$D_j r_j = F\left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda};\nu,\mu,\xi\right) + \frac{1}{2\lambda}G\left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda};\nu,\mu,\xi\right)\left(\frac{\partial r_2}{\partial x} - \frac{\partial r_1}{\partial x}\right). \tag{21}$$

3 Pavyzdžiai

Paimkime (2) sąlygose:

$$\xi(\varepsilon) = \mu(\varepsilon) = \varepsilon, \qquad \nu(\varepsilon) \equiv 0, \qquad \rho_0 = T_0 = 1,$$
$$\tilde{\rho}(x) = a(x) = A + B\sin\omega x, \qquad \tilde{u}^{(0)}(x) = \frac{1}{2}\cos x, \qquad \tilde{u}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\sin x.$$

Tada $\lambda = 1$, $r_1^{(0)}(x) = \sin x$, $r_2^{(0)}(x) = 0$.

1. Tarkime, kad $B = 0$. Nesudėtinga (8) sistemos analizė rodo, kad šiuo atveju $R_1 = \sin(y_1 + \frac{A\tau}{2})$, $R_2 = 0$,

$$\tilde{u}(t,x;\varepsilon) = -\frac{1}{2}\int R_1(\tau, y_1)\,dy_1 + O(\varepsilon) = \frac{1}{2}\cos\left(x - t + \frac{\varepsilon tA}{2}\right) + O(\varepsilon).$$

Pastebėkime, kad tą patį rezultatą, gauname palikdami (20) lygtyje $O(\varepsilon)$ eilės narius ir taikydami Dalambero formulę

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t,x;\varepsilon) &= \frac{1}{2}\big(\tilde{u}^{(0)}(x + t\sqrt{1-\varepsilon A}\,) + \tilde{u}^{(0)}(x - t\sqrt{1-\varepsilon A}\,)\big)\\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon A}}\int_{x-t\sqrt{1-\varepsilon A}}^{x+t\sqrt{1-\varepsilon A}} \tilde{u}^{(1)}(x)\,dx\\ &= \frac{1}{4}\left(\cos\left(x + t - \frac{\varepsilon tA}{2}\right) + \cos\left(x - t + \frac{\varepsilon tA}{2}\right)\right) - \frac{1}{4}\cos(x)\Big|_{x-t+\frac{\varepsilon tA}{2}}^{x+t-\frac{\varepsilon tA}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\cos\left(x - t + \frac{\varepsilon tA}{2}\right) + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

2. Tarkime, kad $A = 0$, $\omega = 1$. Iš (8) gauname $R_1 = \sin(y_1)$, $R_2 = 0$,

$$\tilde{u}(t,x;\varepsilon) = -\frac{1}{2}\int_0^{x-t} R_1(\tau, y)\,dy + O(\varepsilon) = \frac{1}{2}\cos(x - t) + O(\varepsilon).$$

3. Tarkime, kad $A = 0$, $\omega = 2$. Šiuo atveju (8) sistema įgyja tokį pavidalą:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1}{\partial \tau} &= -\frac{B}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2(y_1 + s)\frac{\partial R_2(\tau, y_1 + 2s)}{\partial y_1}\,ds,\\ \frac{\partial R_2}{\partial \tau} &= \frac{B}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2(y_2 - s)\frac{\partial R_1(\tau, y_2 - 2s)}{\partial y_2}\,ds,\\ &R_1(0, y_1) = \sin(y_1), \qquad R_2(0, y_2) = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Pastebėję, kad

$$\int_0^{2\pi} \sin 2(x - s)\cos(x - 2s)\,ds = \int_0^{2\pi} \sin 2(x + s)\cos(x + 2s)\,ds = \pi\sin(x),$$

sistemos (3) sprendinio ieškome taip: $R_j(\tau, y_j) = V_j(\tau)\sin(y_j)$. Gauname

$$V_1' = -\frac{B}{4}V_2, \qquad V_2' = \frac{B}{4}V_1, \qquad V_1(0) = 1, \qquad V_2(0) = 0.$$

Taigi $V_1(\tau) = \cos(\frac{B\tau}{4})$, $V_2(\tau) = \sin(\frac{B\tau}{4})$ ir

$$\tilde{u}(t,x;\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\varepsilon tB}{4}\right)\cos(x - t) - \sin\left(\frac{\varepsilon tB}{4}\right)\cos(x + t)\right) + O(\varepsilon).$$

4 Išvados

Straipsnyje pasiūlyta netiesinių nehomogeninių stygų asimptotinės analizės bendroji schema, kai mažieji parametrai apibrėžiami (2) sąryšiais. Parodyta, kaip uždavinys pertvarkomas į (1) pavidalo dviejų silpnai netiesinių lygčių hiperbolinę sistemą. Esant periodinėms pradinėms sąlygoms konstruojama neturinti sekuliariųjų narių asimptotinė eilutė, tolygiai aproksimuojanti stygos svyravimus ilgajame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$.

Išnagrinėti schemos taikymo pavyzdžiai, kai asimptotiniai artiniai išreikšti analiziniu pavidalu. Dėl apribojimų straipsnio apimčiai konstruojami tik pagrindiniai asimptotinių skleidinių nariai. Aukštesniųjų eilių asimptotiniai skleidiniai leistų aptikti silpnųjų rezonansų atsiradimą. Tai yra tolesnių tyrimų objektas.

Literatūra

[1] A. Krylovas ir P. Miškinis. Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesiniai svyravimai. Asimptotikų konstravimas. *Liet. mat. rink.*, **47**(spec. nr.):123–127, 2007.

[2] O. Lavcel and A. Krylovas. Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesinių svyravimų asimptotikų tyrimas. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **50**:41–46, 2009.

Literatūra

SUMMARY

Asymptotic integration of systems of two wave equations with small parameter
A. Krylovas

In this article we consider a hyperbolic system of two weakly nonlinear equations. Coefficients of the equations and initial conditions are periodical functions of the space variable. A multi-scale perturbation technique and integrating along characteristics are used to construct asymptotic series without secular members. The scheme of asymptotic integration is applied to analysis of oscillations of nonlinear non-homogeneous strings.

Keywords: asymptotic solutions, averaging, wave equation, resonances.