Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
57 t., 2016, 13–18

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Žinių tikrinimo testo modeliavimo teoriniai ir praktiniai aspektai

Julija Karaliūnaitė, Aleksandras Krylovas

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva
E. paštas: julija.karaliunaite@vgtu.lt, aleksandras.krylovas@vgtu.lt

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjamas vienas žinių tikrinimo testas, kuriam taikomas anksčiau pasiūlytas matematinis modelis. Parodyta, kaip konstruojamos testo klausimų charakteristinės funkcijos ir kaip gali būti prognozuojami sudaryto iš kai kurių ištirtų klausimų testo rezultatai. Aptartos tolesnių tyrimų perspektyvos.
Raktiniai žodžiai: matematinis modeliavimas, žinių tikrinimo testai.

Įvadas

Šis tyrimas yra [1] straipsnyje pasiūlyto žinių vertinimo matematinio modelio taikymas vienam konkrečiam testui. Modelio [1] esmė yra aprašyti testo klausimus tam tikromis charakteristinėmis funkcijomis $k_j(p)$, kurių apibrėžimo sritis yra studento žinių lygis $p \in [0,1]$, o įgyjamos reikšmės – tikimybės teisingai atsakyti į j-ąjį testo klausimą. Straipsnyje [1] buvo nagrinėjamos atkarpomis tiesinės funkcijos $k_j(p)$ ir daromos prielaidos apie studento žinių lygio tikimybinį skirstinį. Tai leido atlikti Monte Carlo tipo eksperimentus ir prognozuoti testo rezultatą. Šiame straipsnyje mes nagrinėsime priklausančias nuo vieno parametro $a > 0$ klausimų charakteristines funkcijas

$$k(p;a) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg}\left(\frac{a\ln p}{\ln(1-p)}\right), \tag{1}$$

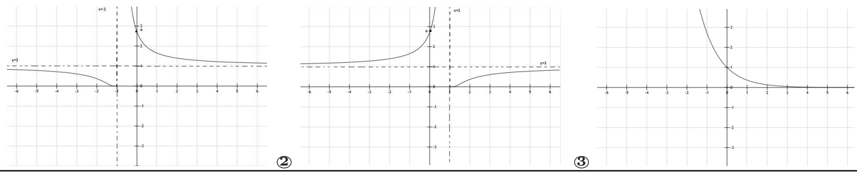
kai žinomi testo rezultatai, $r_i \in \{0,1,\dots,n\}$ – teisingų atsakymų skaičiai (čia i – studento numeris; n – klausimų skaičius), mes perskaičiuojame santykinius testo vertinimus (taikome norminių vertinimų principą):

$$p = \frac{r - \min_i r_i}{\max_i r_i - \min_i r_i}. \tag{2}$$

Tada funkciją $k(p;a)$ atitinkančias testo rezultatus parametro a reikšmes nustatome mažiausių kvadratų metodu. Žinodami tas reikšmes, prognozuojame sudaryto iš atrinktų klausimų testo rezultatą, priklausomai nuo studento žinių lygio p.

1 Vieno konkretaus testo analiz4

Analizuosime konkretų testą, kuris buvo pateiktas VGTU pirmo kurso studentams 2015 rudens sesijos Matematika 1 dalyko egzamino metu. Testą sprendė 21 studentas. Toliau pateikiame testą (teisingi atsakymai sužymėti).

1	Duota funkcija $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$. Jos apibrėžimo sritis yra: ① $x \neq 1$; ② $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; ③ $(-\infty; +\infty)$; ④ $x \leq -1$; ⑤ $(1; +\infty)$; ⑥ $(-\infty; -1)$; • ⑦ $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; ⑧ $(-\infty; 1)$.
2	$\lim_{x \to -1-0} e^{\frac{1}{1+x}} =$ ① $+\infty$; ② $\frac{1}{e}$; ③ $-\infty$; ④ e; ⑤ -1; •⑥ 0; ⑦ 1; ⑧ e^2.
3	Kurie iš taškų $A(0,0)$, $B(0,e)$, $C(e,0)$ priklauso funkcijos $f(x)$ grafikui? ① AC; ② C; •③ B; ④ Nei vienas; ⑤ BC; ⑥ Visi; ⑦ A; ⑧ AB.
4	$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{1+x}} =$ ① 0; ② -1; ③ $+\infty$; ④ e; ⑤ $-\infty$; ⑥ $\frac{1}{e}$; •⑦ 1; ⑧ e^2.
5	Kurios iš tiesių A. $x = -1$; B. $y = 1$; C. $y = -1$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko asimptotės? ① A; ② C; ③ B; ④ BC; ⑤ Nei vienas; •⑥ AB; ⑦ AC; ⑧ Visi.
6	Kurie iš teiginių yra teisingi: A. $f(x)$ didėjanti; B. $f(x)$ mažėjanti; C. $f(x)$ ekstremumų neturi? ① C; ② B; ③ A; ④ AB; ⑤ AC; ⑥ Nei vienas; •⑦ BC; ⑧ Visi.
7	Kurie iš teiginių yra teisingi: Funkcija $f(x)$ yra iškila A. aukštyn intervale $(-\infty; -1)$; B. žemyn intervale $(-1; +\infty)$; C. žemyn intervale $(0; +\infty)$? •① AB; ② C; ③ BC; ④ AC; ⑤ B; ⑥ A; ⑦ Nei vienas; ⑧ Visi.
8	Kuris iš pateiktų grafikų yra funkcijos $f(x)$ grafikas?  •① ② ③
9	Tiesinių lygčių sistemos $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = -5 \\ 5x + 4y + z = 7 \\ 2x + 2y + 5z = 5 \end{cases}$ sprendiniai yra: •① Sprendinių neturi; ② $(1; 0; 2)$; ③ $(t; 0; 2t)$, $t \in \mathbb{R}$; ④ $(1; 0; 0)$; ⑤ Turi begalo daug sprendinių.
10	$g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x \leq 2 \\ 4 - 2x, & x > 2 \end{cases}$ Funkcijos $g(x)$ trūkio taškai yra: A. $x = 2$ I-o tipo trūkio taškas; B. $x = 2$ II-o tipo trūkio taškas; C. $x = -1$ I-o tipo trūkio taškas. ① Nei vienas; •② A; ③ Visi; ④ AB; ⑤ B; ⑥ C; ⑦ AC; ⑧ BC.
11	$\lim_{x \to +\infty} (\frac{2x-3}{2x+3})^x =$: ① 1; ② $+\infty$; ③ -1; ④ $-\infty$; •⑤ e^{-3}; ⑥ e; ⑦ 0; ⑧ e^{-1}.
12	Duoti taškai $A(3; -1; 2)$ ir $B(2; -\frac{3}{2}; 4)$. Lygtis plokštumos, einančios per tašką A ir statmenos atkarpai AB, yra: ① $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-2}{2}$; ② $3x - y + 2z + \frac{1}{2} = 0$; ③ $2x - \frac{3}{2}y + 4z + \frac{1}{2} = 0$; •④ $2x + y - 4z + 3 = 0$.
13	Su kuriomis parametro a reikšmėmis matricos $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot E$ atvirkštinės matricos A^{-1} determinantas yra neneigiamas? Čia E yra antros eilės vienetinė matrica. ① -1; ② 0; ③ 1; ④ 2; ⑤ 2; •⑥ Su visais $a \in \mathbb{R}$; ⑦ -2; ⑧ Tokių realių reikšmių nėra.
14	$\vec{a} \times \vec{b}$ žymima vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vektorinė sandauga. Kurie iš teiginių teisingi: A. $\vec{a} \times \vec{b}$ yra vektorius; B. $\vec{a} \times \vec{b}$ yra skaičius; C. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$? ① Visi; ② C; ③ Nei vienas; •④ A; ⑤ AB; ⑥ BC; ⑦ AC; ⑧ B.
15	Su kuriomis parametro m reikšmėmis vektoriai $(1; m; -2)$ ir $(2; 4; m)$ yra statmeni? ① 4; ② -2; ③ 2; ④ 0; ⑤ Su visais $m \in \mathbb{R}$; ⑥ Tokių realių reikšmių nėra; •⑦ -1; ⑧ 1.
16	Antros eilės kreivės $2x^2 - 4y^2 + 8x + 16y - 24 = 0$ kanoninė lygtis yra: ① $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{8} = 1$; ② $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{8} = 1$; ③ $2(x-4)^2 - 4(y-4)^2 = 1$; •④ $\frac{(x+2)^2}{8} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.
17	Ta kreivė yra: ① Elipsė; ② Hiperbolinis paraboloidas; •③ Hiperbolė; ④ Cilindras; ⑤ Vienašakis hiperboloidas; ⑥ Parabolė; ⑦ Dvišakis hiperboloidas; ⑧ Apskritimas.
18	$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 99 & 999 \\ 0 & 1 & 9 & 99 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ ① 2; •② 0; ③ 9; ④ 99; ⑤ 1; ⑥ -1; ⑦ -2. ⑧ 999.
19	Matricos $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rangas yra lygus: ① 0; •② 1; ③ 2; ④ 3; ⑤ 74; ⑤ 1; ⑦ -1; ⑥ 3.

1-oje lentelėje pažymėta: Nr. – studento numeris; Σ – teisingų atsakymų skaičius (eilutės Σ – kiekvieno studento teisingai atsakytų klausimų skaičius, stulpelio Σ – kiek studentų teisingai atsakė į kiekvieną klausimą). Pagal eilutės Σ duomenis nustatome studento žinių lygį, o pagal stulpelio – klausimo sunkumą.

Iš pateiktos 1-osios lentelės matome, kad klausimai 1, 8, 9 yra labai lengvi, į juos atsakė beveik visi studentai, aišku, kad tokius klausimus reikia iš testo eliminuoti. Kita vertus, klausimai 2 ir 7 labai sunkūs, į juos atsakė vos keli studentai, tad tokių

1 lentelė. Testo atsakymų rezultatai.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Σ
1	+	−	−	−	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+	+	+	+	−	9
2	+	−	+	+	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	7
3	+	−	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	−	+	−	−	−	−	−	7
4	−	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	+	+	−	8
5	+	−	+	+	+	−	−	+	+	+	−	−	+	−	−	+	+	−	+	11
6	+	−	+	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	5
7	+	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	−	9
8	+	−	+	+	−	−	−	+	−	−	−	+	−	−	−	+	+	+	+	9
9	+	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+	−	8
10	+	−	+	+	+	+	−	+	+	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	8
11	+	−	+	+	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	5
12	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+	12
13	+	−	+	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	−	−	−	+	+	9
14	−	−	+	−	+	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	5
15	+	−	+	−	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	+	−	−	−	+	6
16	+	−	+	−	+	+	−	+	+	−	−	−	−	+	−	+	−	+	−	9
17	+	−	+	−	+	−	−	+	+	−	+	−	+	+	+	−	−	+	+	11
18	+	−	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	+	+	−	−	+	10
19	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	+	+	4
20	−	−	−	−	+	−	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	+	7
21	+	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	o	+	+	−	−	+	+	6
Σ	17	1	15	8	11	4	1	17	16	3	4	6	7	6	8	8	6	14	13	

klausimų taip pat nereikėtų įtraukti į testą, arba reikėtų apsvarstyti jų formulavimą. Čia verta atlikti dalykinę (didaktinę) klausimo analizę, tačiau šitame straipsnyje apsiribojame tik statistiniais tyrimo aspektais.

Klausimo sunkumas yra tik viena jo charakteristika. Paimkime, pavyzdžiui, stiprius studentus, kurie surinko daugiausiai – 10 arba 11 testo taškų ir paimkime silpnus studentus, kurie surinko mažiausiai – 5 arba 4 testo taškus. Nagrinėkime, pavyzdžiui, testo 5 klausimą. Iš testo rezultatų lentelės matome, jog visi stipriausi studentai į šį klausimą atsakė, o silpniausi neatsakė nei vienas. Todėl galima daryti išvadą, kad šis klausimas gerai diferencijuoja studentus, tai yra, vienareikšmiškai atskiria stiprius studentus nuo silpnų. O, pavyzdžiui, paėmus 18 klausimą, kurio sunkumas panašus, matome, jog kai kurie stipriausi studentai į jį neatsakė, o kai kurie silpniausi kaip tik atsakė teisingai. Todėl šis klausimas blogiau diferencijuoja studentus. Verta tuomet pažiūrėti didaktine prasme į tokių klausimų turinį, bet to nedarome, dėl apribojimo straipsnio apimčiai.

2 Klausimų charakteristinės funkcijos

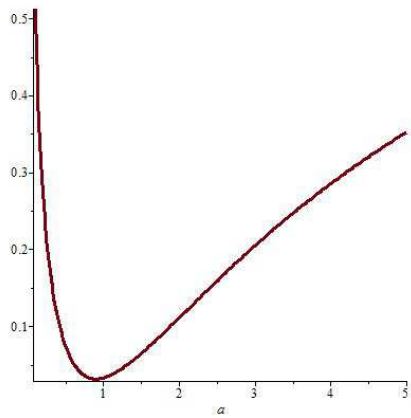
Konstruosime vieno pasirinkto klausimo, į kurį teisingai atsakė maždaug pusė studentų, charakteristinę funkciją ir nagrinėsime, kaip jos pagalba galima sukurti testą, kuris pakankamai gerai diferencijuotų studentus, atsižvelgiant į jų žinių lygį ir klausimų sunkumą.

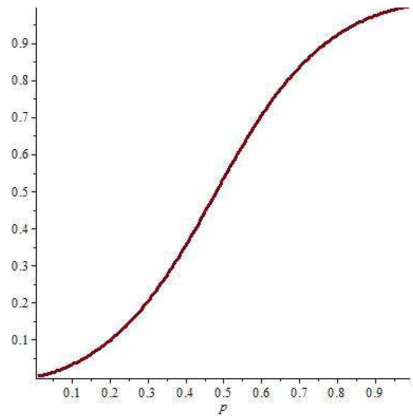
Čia vertėtų pažymėti, jog dėl nepakankamo kiekio statistinių duomenų ir dėl apribojimo straipsnio apimčiai, apsiribojame pilotiniu tyrimu, tiesiog norime pažiūrėti kaip veikia konkretus matematinis statistinis modelis.

Toliau aukščiau pateiktus rezultatus surašome į 2-ąją lentelę.

2 lentelė.

Testo taškai	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Studentų skaičius	1	3	2	3	3	5	1	2	1





1 pav.

Visų testuojamųjų aibę $S = \{1, 2, \ldots, 21\}$ pagal testo rezultatus suskaidome į 4 blokus $S_1 = \{6, 11, 14, 15, 19, 21\}$ – gavusių 4, 5 arba 6 testo taškus; $S_2 = \{2, 3, 4, 9, 10, 20\}$ – 7 arba 8 taškus; $S_3 = \{1, 7, 8, 13, 16\}$ – 9 taškai; $S_4 = \{5, 12, 17, 18\}$ – 10, 11 arba 12 taškų. Pastebėkime, kad $S_i \cap S_j = \emptyset$ ir $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = S$. Testo rezultatus (taškus) perskaičiuojame taikydami (2) formulę. Tada vidutinius žinių lygius $p_j \in [0, 1]$ kiekvienoje grupėje S_j įvertinsime taip:

$$p_1 = \frac{1 \cdot (4-4) + 3 \cdot (5-4) + 2 \cdot (6-4)}{6 \cdot (12-4)} = \frac{10}{48} \approx 0.2083,$$

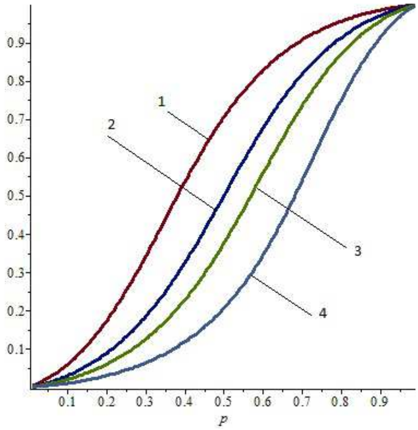
$$p_2 = \frac{3 \cdot (7-4) + 3 \cdot (8-4)}{6 \cdot 8} = 0.4375, \qquad p_3 = \frac{5 \cdot (9-4)}{5 \cdot 8} = 0.625,$$

$$p_4 = \frac{1 \cdot (10-4) + 2 \cdot (11-4) + 1 \cdot (12-4)}{4 \cdot 8} = 0.875.$$

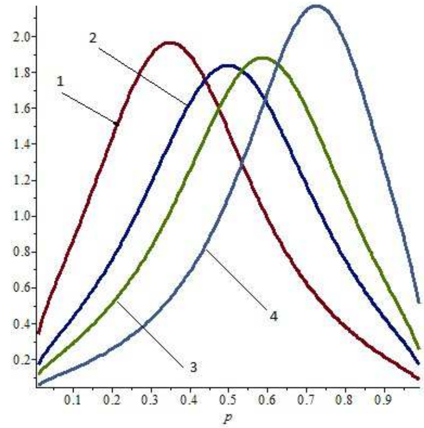
Nagrinėsime 5 testo klausimą. Kiekvienoje testuojamųjų grupėje S_j teisingų atsakymų į šį klausimą buvo atitinkamai: 1, 3, 3 ir 4. Taigi ieškomos klausimo charakteristinės funkcijos $k(p)$ reikšmės $k_j = k(p_j)$: $k_1 = \frac{1}{6} \approx 0.1667$, $k_2 = \frac{3}{6} = 0.5$, $k_3 = \frac{3}{5} = 0.6$, $k_4 = \frac{4}{4} = 1$. Funkcijos $k(p)$ ieškosime (1) pavidalu (2), o parametrą a nustatysime mažiausių kvadratų metodu:

$$\min_{a>0} S(a), \qquad S(a) = \sum_{j=1}^{4} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arcctg}\left(\frac{a \ln p_j}{\ln(1-p_j)} \right) - k_j \right)^2.$$

Apytiksliai sprendžiame lygtį $S'(a) = 0$, $a \approx 0.8995$. 1 paveiksle pateiktas funkcijos $S(a)$ grafikas ir rastos funkcijos $k(p; 0.8995)$ grafikas.



2 pav.



3 pav.

3 lentelė. Čia pateikiamos apskaičiuotos tikimybės $t_j(p)$.

p	t^0	t^1	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6	t^7	t^8	t^9	t^{10}
0.3	0.14	0.32	0.31	0.17	0.05	0.01	0.	0.	0.	0.	0.
0.4	0.02	0.12	0.25	0.28	0.20	0.09	0.03	0.01	0.	0.	0.
0.5	0.	0.02	0.07	0.18	0.26	0.25	0.15	0.06	0.01	0.	0.
0.6	0.	0.	0.01	0.03	0.10	0.21	0.27	0.23	0.12	0.03	0.
0.7	0.	0.	0.	0.	0.01	0.05	0.15	0.25	0.30	0.19	0.05
0.8	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.02	0.09	0.25	0.38	0.26
0.9	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.01	0.05	0.29	0.65

3 Hipotetinio testo rezultatų prognozė

Kadangi tai pilotinis tyrimas, tai pasirinkome 10 hipotetinių klausimų su keturiomis hipotetinėmis charakteristinėmis funkcijomis. Parametrus a_j parenkame hipotetiškai, atsižvelgdami į nagrinėto 5 klausimo rezultatus, darydami prielaidą, kad sudarę testą iš 10 panašaus sunkumo klausimų, mes gausime panašias charakteristines funkcijas. Taigi tarkime, kad testas sudarytas iš 10 klausimų, kurių charakteristinės funkcijos yra $k_j(p; a_j)$, esant parametro a reikšmėms $a_1 = 0.5$, $a_4 = 3$ (po du klausimus), ir $a_2 = 1$, $a_3 = 1.5$ (po 3 klausimus). Toliau atliekame tokio testo analizę, naudodami [1] straipsnio metodiką.

3 pav. ir 4 pav. pavaizduotos (1) charakteristinės funkcijos k_j ($j = 1, 2, 3, 4$) ir jų išvestinės, kurios rodo testo klausimo skiriamąją gebą, t. y., kokio žinių lygio studentus atitinkamas klausimas geriausiai diferencijuoja.

Pažymėkime $t_j(p)$ ($j = 0, 1, \ldots, 9, 10$) tikimybes, kad studentas, kurio žinios įvertintos reikšme $p \in [0, 1]$, teisingai atsakys į $0, 1, \ldots, 9, 10$ testo klausimą. Jos lygios (žr. [1]) šio polinomo atitinkamų koeficientų moduliams

$$P(x; p) = \bigl(1 - k_1(p) - k_1(p)x\bigr)^2 \bigl(1 - k_2(p) - k_2(p)x\bigr)^3 \times \bigl(1 - k_3(p) - k_3(p)x\bigr)^3 \bigl(1 - k_4(p) - k_4(p)x\bigr)^2. \tag{3}$$

Iš 3-sios lentelės matome, jog studentas, kurio, pavyzdžiui, žinių lygis yra 0.3, atsakys su tikimybe 0.14 į 0 testo klausimų, atitinkamai 0.32 – 1, 0.31 – 2, 0.17 – 3, 0.05 – 4, 0.01 – 5, o į likusius atsakys su tikimybe beveik lygia 0. Norime pastebėti, jog tai yra santykinis vertinimas, priklausantis nuo mūsų testo. Aišku, kad čia reikėtų atskiro tyrimo ir reikia daugiau statistinių duomenų, kad galima būtų pasiūlyti konkrečią transformaciją, kaip tokiam konkrečiam testui rašyti pažymius 10-balėje skalėje. Bet čia yra hipotetinis santykinis įvertinimas.

4 Išvados ir numatomi tyrimai

Straipsnyje parodyta bendroji schema, kaip konkrečiam žinių tikrinimo testui pritaikyti [1] straipsnyje pasiūlytą matematinį modelį. Parodyta, kaip sukonstruoti vieno klausimo charakteristinę funkciją. Testas buvo analizuojamas statistiniais aspektais, tačiau gauta informacija gali buti naudinga ir didaktiniam tyrimui. Lieka atviras klausimas dėl studentų žinių vertinimo skalės – mes naudojome santykinius įverčius ir žinių lygio įverčiai buvo apskaičiuoti tik remiantis straipsnyje nagrinėjamu testu. Bendru atveju reikėtų kompleksinio vertinimo, pavyzdžiui, atlikti su studentais kelis testus, panaudoti kitą papildomą informaciją, bet tai jau yra ateities tyrimų objektas.

Literatūra

[1] A. Krylovas ir N. Kosareva. Žinių tikrinimo matematinis modelis. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **48/49**:217–221, 2008.

[2] A. Krylovas and N. Kosareva. Mathematical modelling of forecasting the results of knowledge testing. *Techn. Econ. Devel. Econ.* **14**(3):388–401, 2008.

SUMMARY

Theoretical and practical aspects of the knowledge examination test modeling
J. Karaliūnaitė, A. Krylovas

In the article one knowledge examination test for which is applied known mathematical model is considered. It is shown how the characteristic functions of the questions of the text can be constructed and how there may be made predictions about the results of the test made of the analyzed questions. Also the perspectives of the further research are presented.

Keywords: mathematical modeling, knowledge examination tests.