

# Vidinės migracijos matematinis modelis

Vaidotas Kanišauskas

*Šiaulių universitetas, Technologijos, fizinių ir biomedicinos mokslų fakultetas*

Vilniaus g. 141, LT-76353 Šiauliai

E. paštas: vaidotaska@yahoo.com

**Santrauka.** Vidinės migracijos modelis taikomas, kada yra turimi gyventojų procentiniai kiekiai šalies administraciniuose teritoriniuose vienetuose įvairiais laiko tarpais. Tokie duomenys leidžia pritaikyti polinominį skirstinį ir patikrinti statistinę hipotezę apie tai, kad pakitus laikui, gyventojų kiekiai šalies teritoriniuose vienetuose kardinaliai pakito, kas įmanoma tik vykstant vidinei migracijai.

**Raktiniai žodžiai:** demografiniai duomenys, vidinė migracija, polinominis skirstinys.

## Įvadas

Matematiniai metodai istorijoje sunkiai skinasi kelią, nors jų taikymo metodologiniai pagrindai [2] Lietuvoje pasirodė jau senokai. Geras tų taikymų pavyzdys yra vieno iš minėtos knygos autorių – Stanislovo Pamerneckio – darbas [9], kuriame tyrinėjamas XIX a. lietuvių valstiečių gyvenimas. Tuose taikymuose dominuoja matematinės statistikos metodai. Tai yra natūralu, nes istorijoje gausu statistinių duomenų.

Empirinių duomenų yra gausu ir archeologų darbuose, bet jie neskuba taikyti matematinės statistikos metodų. Tie metodai galėtų padėti archeologams daryti patikimesnes išvadas savo tyrinėjimuose, kai kasinėjimų vietose randama daug sunaikintų archeologinių objektų. Tik matematiškai su tam tikru patikimumu galima nustatyti, ar duomenų patikimums išvadoms daryti yra pakankamai ar nepakankamai. Išimti čia sudaro Eugenijus Jovaiša, savo paskutinėse monografijose [3, 4] sėkmingai pritaikęs matematinis metodus. Ypač originalūs matematikos taikymai buvo panaudoti antrojoje knygoje, kur su tam tikra ilgio metrika buvo identifikuojamos baltų genčių dislokavimo vietos.

Suintensyvėjus istorinių duomenų (rašytinių šaltinių) suskaitmeninimo procesui ir jų patalpinimui į prieinamas internetines duomenų bazines, jie tapo prieinami plačiau visuomenei. Tarp tų duomenų yra nemažai statistinių faktų, o tai skatina matematinės statistikos metodų taikymą. Tose bazėse gausėja archyvinės dokumentacijos, demografinių žmonių surašymo duomenų. Tačiau su tais duomenimis reikia dirbti atsargiai, nes juos grupuojant ir suvidurkinant galima prarasti svarbios informacijos. Taip nutiko V. Europoje su valstiečių vidinės migracijos viduramžiais procesų tyrimais. Pasirodo, kai nagrinėjami ilgesni laiko tarpai ir duomenys suvidurkinami, tai atrodo, kad valstiečių mobilumas tais laikotarpiais buvo nedidelis. Bet susiaurinus laikotarpius paaiškėjo, kad valstiečių mobilumas buvo didelis (žr. [8]). Tas pats procesas buvo būdingas ir Lietuvos valstiečiams XIX a. antrojoje pusėje (žr. [5]).

Kiek toli Vakarai pažengė taikydami matematinis metodus demografijoje, matyti [6] knygoje. Tačiau reikia pažymėti, kad čia dominuoja deterministiniai, bet ne tiki-

mybiniai matematiniai metodai. Tikimybiniai metodai pastaruoju metu intensyviai taikomi finansiniuose tyrinėjimuose (pvz., [7]), ir tai gali būti panaudota tiriant šalių ekonominę istoriją.

## Polinominio skirstinio taikymas

Yra daugybė statistinių–demografinių duomenų migracijos tema, todėl čia labai tinka taikyti matematinius–statistinius metodus [6]. Matematika leidžia šioje subtilioje srityje įvesti tvarką. Terminas *vidinė migracija* yra suprantamas kaip žmonių judėjimas vienos šalies viduje. Kiekviena šalis yra suskirstyta į baigtinį skaičių administracinių–teritorinių vienetų. Pagal tai, kaip laikui bėgant kinta gyventojų kiekiai visuose šalies teritoriniuose vienetuose, galime nustatyti gyventojų vidinius judėjimus. Šalies gyventojų pasidalinimas į teritorinius vienetus gerai aprašomas polinominio skirstinio tikimybinio modeliu, kuris žemiau ir bus pateiktas.

Tarkime, kad turime paprastąją atsitiktinę imtį  $X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , čia  $X_1, X_2, \dots, X_n$  yra nepriklausomi atsitiktiniai elementai, simbolizuojantys šalies gyventojus. Tegu tos šalies administraciniai–teritoriniai vienetai yra gubernijos (arba apskritys ar rajonai). Bendrą gyventojų skaičių žymime  $n$ . Tegu  $A_j$  simbolizuoja  $j$ -ąjį rajoną, kai  $j = 1, \dots, k$ ;  $k$  – rajonų skaičius. Pažymėkime  $Y_j$  – gyventojų, patekusių į  $A_j$  rajoną, skaičių:

$$Y_j = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \in A_j), \quad j = 1, \dots, k.$$

Vietoje pradinės imties  $X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  gauname imtį  $Y^k = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ . Atsitiktinis vektorius  $Y^k = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$  turi polinominį skirstinį  $Y^k \sim P = (p_1, p_2, \dots, p_k, n)$ , t. y.

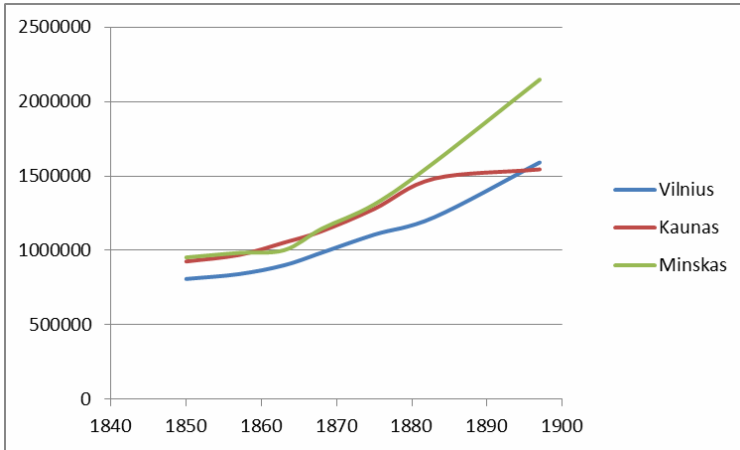
$$P(Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \dots, Y_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k},$$

čia  $n_1 + \dots + n_k = n$  ir  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ ,  $p_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) yra tikimybės.

Yra žinoma, kad parametru  $p_i$  maksimalaus tikėtimumo įverčių  $\hat{p}_i$  išraiška yra tokia:  $\frac{Y_i}{n}$  (žr. [1]). Kadangi šalies gyventojai buvo stebimi įvairiais laiko momentais (pvz., gyventojų surašymai), tai mūsų modelis bus negyvas, jei jame gyventojų skaičius rajonuose  $Y^k = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$  nepriklausys nuo  $t$ . Įvedame jį:  $Y(t)^k = (Y(t)_1, Y(t)_2, \dots, Y(t)_k)$ . Dabar  $Y(t)_j$  žymi gyventojų skaičių  $j$ -ame rajone momentu  $t$ , o  $Y(t)^k \sim P(t) = (p(t)_1, p(t)_2, \dots, p(t)_k, n(t))$ , t. y. turi polinominį skirstinį. Kadangi domina vidinė gyventojų migracija, t. y. gyventojų kiekio pokyčiai rajonuose nuo laiko momento  $t_1$  iki  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ), tai tikriname statistinę hipotezę  $H_0 : p_i = p_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , kai  $p_{i0} = \frac{Y_i(t_1)}{n(t_1)}$ , o  $\hat{p}_i = \frac{Y_i(t_2)}{n(t_2)}$ ,  $n = n(t_2)$  Pirsono statistikoje. Parinę reikšmingumo lygmenį  $\alpha$  norimu tikslumu sužinosime, ar gyventojų žymiai pagausėjo tam tikrose šalies rajonuose praėjus tam tikram laiko tarpui (nors metams). Jei hipotezė  $H_0$  priimama (su tikimybe  $1 - \alpha$ ), tai nuo laiko momento  $t_1$  iki  $t_2$  gubernijoje gyventojų daugėjo arba mažėjo vienodai visuose rajonuose, ir galima laikyti, kad vidinė migracija su dideliu patikimumu šalyje nevyko. Jei  $H_0$  atmetame, tada galime sakyti, kad vidinė migracija šalies viduje vyko. Hipotezės  $H_0 : p_i = p_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,

1 lentelė. Vilniaus, Kauno ir Minsko gyventojų skaičius ir procentinė dalis nuo 1850 iki 1897 m.

Metai	Vilnius	%	Kaunas	%	Minskas	%	SUMA
1850	808178	30,07	926132	34,46	953059	35,46	2687367
1857	841095	30,1	969369	34,7	983431	35,2	2793895
1863	899993	30,47	1052200	35,63	1001300	33,9	2953493
1868	984585	30,21	1129264	34,65	1145345	35,14	3259194
1875	1106136	29,94	1279223	34,63	1309006	35,43	3694365
1883	1223262	28,46	1482631	34,5	1591767	37,04	4297660
1897	1591207	30,12	1544564	29,23	2147621	40,65	5283392



1 pav. Vilniaus, Kauno ir Minsko gubernijų gyventojų skaičiaus dinamika nuo 1850 iki 1897 m.

tikrinimui yra sudaroma Pirsono statistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Y_i - n \cdot p_{i0})^2}{n \cdot p_{i0}} = \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_{i0}} \cdot (\hat{p}_i - p_{i0})^2,$$

kuri asimptotiškai turi  $\chi^2$  skirstinį su  $k - 1$  laisvės laipsnių, kai hipotezė  $H_0$  teisinga. Jei

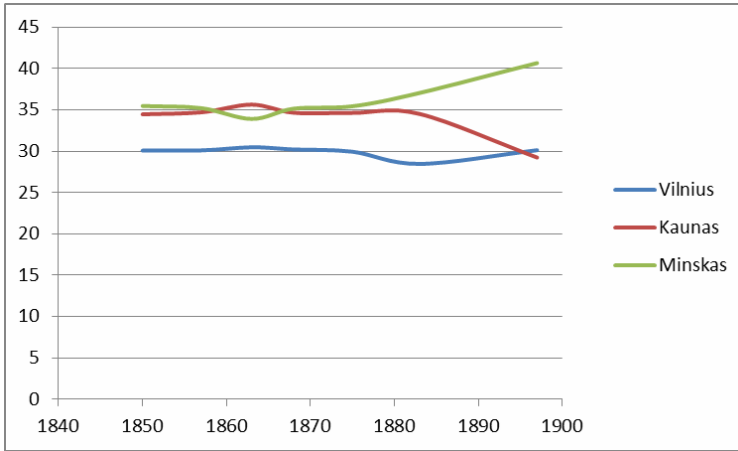
$$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(k - 1),$$

čia  $\chi^2_{1-\alpha}(k - 1)$  yra  $\chi^2$  skirstinio su  $k - 1$  laisvės laipsnių  $1 - \alpha$  eilės kvantilis, tada hipotezę priimame.

Didžiausias pokytis  $\Delta = \hat{p}_i - p_{i0}$  su teigiamu ženklu rodo, kur gyventojai atvyko. Analogiškai, didžiausias pokytis su minuso ženklu rodo, iš kur gyventojai išvyko. Matydami tokius pokyčius visuose rajonuose, galime orientuotis, kaip judėjo gyventojų srautai šalies viduje kintant laikui.

*Pavyzdys.* Parodysime vidinės migracijos metodą teritoriniam vienetui iš trijų carinės Rusijos gubernijų (Vilniaus, Kauno ir Minsko) XIX a. Duomenys paimti iš [5] darbo. Ką galime pasakyti apie gyventojų migraciją tarp tų gubernijų?

Pagal paprastą gyventojų skaičiaus dinamiką (1 pav.), gaunamą iš demografinių duomenų, nieko konkretaus negalime pasakyti, nebent tik tai, kad visose trijose gubernijose per visą XIX a. antrosios pusės laikotarpį gyventojų daugėjo.



2 pav. Vilniaus, Kauno ir Minsko gubernijų gyventojų tarpusavio dinamika.

Kad būtų aiškiau, duomenis transformuojame. Tam tikslui skaičiuojame, kokią procentinę dalį kiekviena iš gubernijų sudaro visumos atžvilgiu (1 lent.). Bėgant laikui, ta gubernijų procentinė dalis gali nekisti, didėti ar mažėti: pirmu atveju tai reikš, kad gyventojai pasilieka savo gubernijoje; antru atveju – keliauja į tą, kurios procentinė dalis padidėjo; trečiu atveju – iš tos gubernijos gyventojai išvyksta į gretimas, į tą, kurios procentinė gyventojų dalis padidėjo, jei tokios yra kelios, tai į jas. Tą kitimą vėl patogiu stebėti grafiškai (2 pav.). Čia grafikas, skirtingai nuo ankstesniojo (1 pav.), labai aiškus ir informatyvus. Iš jo matyti, kad nuo 1850 m. iki 8-ojo dešimtmečio vidurio visos trys gubernijos gyventojų atžvilgiu vystėsi panašiai, išskyrus nedidelį laikotarpį 7-ojo dešimtmečio pradžioje, kada iš Minsko gubernijos gyventojai vyko į Kauno guberniją. Nors grafikas aiškus, bet situacija nėra tokia paprasta, nes tarp Kauno ir Minsko gubernijų yra Vilniaus gubernija. Galėjo būti, kad dalis gyventojų iš Minsko gubernijos persikėlė gyventi į Vilniaus guberniją, o iš Vilniaus dalis gyventojų migravo į Kauno guberniją. Bent tai rodo esamas grafikas. Tas pats grafikas, laiku keliaujant toliau, rodo, kad nuo 8-ojo dešimtmečio pabaigos pastovi, nors ir nelabai žymi dalis gyventojų, persikėlė gyventi į Kauno guberniją. O nuo 9-ojo dešimtmečio pradžios prie vilniečių prisijungia Kauno gubernijos gyventojai, įvyksta gyventojų „susistumdymas“, dėl ko amžiaus pabaigoje Kauno gubernijoje gyventojų žymiai sumažėjo, Vilniaus gubernijoje pradeda didėti (greičiau grįžta į senas „vėžes“), o Minsko gubernija auga kaip ant mielių – darosi patraukliausia imigracijos atžvilgiu. Tie rodikliai neprieštarauja istorikų nuomonei, kad nuo 8-ojo dešimtmečio suintensyvėjo „išorinė“ migracija iš Vilniaus ir Kauno gubernijų į užsienį. Nagrinėjamoje sistemoje jie traukė į Minsko guberniją, nors praplėtus tyrimo sistemą gali paaiškėti, kad į Minsko guberniją atvyko kitų gubernijų žmonės, o lietuviai iškeliavo „užjūrin“.

Matematiškai tikrinama, ar gyventojų kiekio Vilniaus, Kauno ir Minsko gubernijose procentinės dalies pokyčiai, įvykę laikui pasislinkus iš momento  $t_1 = 1863$  į  $t_2 = 1868$ , yra statistiškai reikšmingi. Pasirenkame reikšmingumo lygmenį  $\alpha = 0,001$  ir tikriname statistinę hipotezę  $H_0: p_1 = 0,3047, p_2 = 0,3563, p_3 = 0,339$ , kuri sako, kad praslinkus 5 metams nuo 1863 iki 1868 metų gyventojų situacija (procentinė sudėtis) gubernijose nepasikeitė, t. y. niekas tarp gubernijų nemigruoja. Mūsų atveju  $\hat{p}_1 = 0,3021, \hat{p}_2 = 0,3465, \hat{p}_3 = 0,3514$ . Naujoje situacijoje  $n = n(1868) = 3259194$ .

Viską įrašę į Pirsono statistiką gauname

$$\begin{aligned}\chi^2 &= 3259194 \left( \frac{(0,3021 - 0,3047)^2}{0,3047} + \frac{(0,3465 - 0,3563)^2}{0,3563} + \frac{(0,3514 - 0,339)^2}{0,339} \right) \\ &= 2426,7958.\end{aligned}$$

Dabar įrašome  $k = 3$  ir  $\alpha = 0,001$  į formulę  $\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$  ir gauname  $\chi^2_{0,999}(2) = 13,8$ . Kadangi  $\chi^2 = 2426,7958 > \chi^2_{0,999}(2) = 13,8$ , tai hipotezę  $H_0$  atmetame. Vadinasi, situacija nuo 1863 m. iki 1868 m. kardinaliai pasikeitė. Kitaip sakant, hipotezė  $H_0$  apie tai, kad tarp Vilniaus, Kauno ir Minsko gubernijų gyventojų nevyksta gyventojų migracija, buvo atmesta. Taigi, migracija tarp tų gubernijų gyventojų vyko nuo 1863 iki 1868 m. Analogiškais skaičiavimais galima įsitikinti, kad migracija tarp Vilniaus, Kauno ir Minsko gubernijų vyko ir nuo 1850 iki 1857 m, ir taip iki 1897 m. imtinai.

## Išvada

Šalies vidinėje migracijoje svarbiausia – nustatyti, ar vidinės migracijos faktas įvyko. Tam tikslui surandamos šalies rajonų gyventojų procentinės dalys visuose šalies rajonuose dviem atskirais laiko momentais (patartina imti nedidelius laiko intervalus, kurių mažiausias – vieneri metai). Po to, patikrinus statistinę hipotezę polinominio skirstinio parametrus, suderintiems su nagrinėjamais laikotarpiais, nustatomas pats vidinės migracijos faktas. Tada sudaroma procentinių pokyčių lentelė, kurioje pokyčiai su neigiamais ženklais rodo, iš kur gyventojai atvyksta, o pokyčiai su teigiamais ženklais rodo, į kur gyventojai vyksta. Papildoma informacija apie šalį atitinkamais metais (apimanti gimstamumą, mirtingumą, vedybas, tikyba, ekonominę padėtį, švietimą, kelius, sveikatą ir t. t.) leidžia atskleisti vidinės migracijos tikrąsias priežastis.

## Literatūra

- [1] V. Bagdonavičius ir J. Kruopis. *Matematinė statistika. II*. TEV, Vilnius, 2009.
- [2] R. Eidukevičius, D. Juknevičienė, N. Kosareva ir S. Pamerneckis. *Matematinė statistika istorijoje*. VU leidykla, Vilnius, 1998.
- [3] E. Jovaiša. *Aiščiai. I. Kilmė*. Edukologija, Vilnius, 2012.
- [4] E. Jovaiša. *Aiščiai. II. Raida*. LEU leidykla, Vilnius, 2014.
- [5] V. Kanišauskas. *Vidinė migracija Vilniaus gubernijoje XIX a. antrojoje pusėje. Magistro darbas*. Šiauliai, 2015.
- [6] N. Keyfitz and H. Caswel. *Applied Mathematical Demography*. Springer, New York, 2005.
- [7] R. Leipus. *Finansų rinkos: diskretaus laiko stochastiniai modeliai*. VU leidykla, Vilnius, 1999.
- [8] M. Oris. The history of migration as a chapter in the history of the European rural family: an overview. *Hist. Family*, 8:187–215, 2003.
- [9] S. Pamerneckis. *Agarinių santykių raida ir dinamika Lietuvoje: XVIII a. pabaiga–XIX a. pirmoji pusė: (statistinė analizė)*. VU leidykla, Vilnius, 2004.

## SUMMARY

**The mathematical model of inner migration***V. Kaniškauskas*

The model of inner migration is applied when considering the percentage of inhabitants residing in administrative units of a state in different time units. Such data allows applying the polynomial distribution and test the statistical hypothesis suggesting that, in the time running, the amounts of inhabitants have cardinally changed in territorial units of the state; and it was possible only due to inner migration.

*Keywords:* demographic data, inner migration, polynomial distribution.