Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 209–214

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Šešiasdešimtainės skaičiavimo sistemos gyvybingumas

Eugenijus Paliokas

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: eugenijus.paliokas@gmail.com

Santrauka. Šio pranešimo tikslas – paliesti kelis aspektus, galinčius pagyvinti, istoriniu požiūriu nuspalvinti matematiką, dėstomą universitete, o gal ir mokykloje, susiejant kelių sričių žinias. Keliama šešiasdešimtainės skaičiavimo sistemos pagrindimo hipotezė.

Raktiniai žodžiai: šešiasdešimtainė skaičiavimo sistema, elipsė, ekscentricitetas, elipsinis integralas, dangaus kūnų judėjimas, trijų kūnų uždavinys, geocentrinė, heliocentrinė sistema.

Įvadas

Beveik prieš 6000 metų šumerai vartojo skaičiavimo sistemą, kurios pagrindas 10 (dešimtainę), ir sistemą, kurios pagrindas 60 (šešiasdešimtainę). Šešiasdešimtainė sistema išliko iki mūsų dienų – taip matuojame laiką ir kampus.

Kodėl būtent 60?

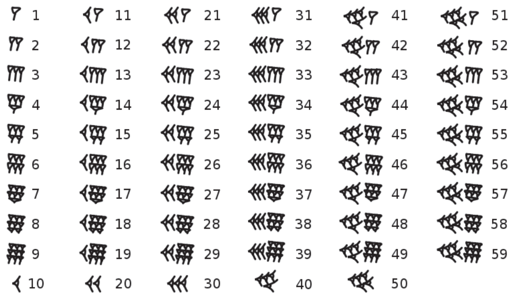
1 Skaičių vardų semantika

Šešiasdešimtainio skaičiavimo liekanų randame lietuvių kalboje: 60 – kapa, 30 – puskapė, 12 – tuzinas. Kaip kapa dabar dažniausiai suprantamas kiekis, lygus šešioms dešimtims, bet kadaise kapomis vadinti ir lietuviški ilgieji [2]; kapos ir yra istorinis jų vardas, o ilgųjų vardą kapoms pasiūlė istorikas E. Gudavičius. Kapos atsiskaitant buvo kapojamos, iš čia – rublio vardas, nuo žodžio „kirsti“ – „rubitj“. Didesniųjų svarelių–kapų svoris labiausiai atitinka irakiečių svorio vienetą, mažesniųjų – arabų dirhamą. Irakas, kaip žinia, yra Tarpupyje, siejamame su civilizacijų lopšiu.

Dabar lietuviai sykiu su dauguma tautų pasaulyje skaičiuoja dešimtimis: dvylika – „dvi liko“ (liko nuo pilnos dešimties), analogiškai – trylika, keturiolika, iki dvidešimties; po to – iš naujo „dvi dešimt(ys) (ir) du“, ir t. t.

Vokiečiai iš senojo skaičiavimo turi dar ir 11 – „elf“, ir 12 – „zwölf“, kaip ir anglai – eleven, twelve, bet jau 13 – dešimtainiškai, „dreizehn“ ir „thirteen“, „trys ir dešimt“. Anglijoje prie dešimtainės pinigų sistemos pereita tik 1971 metų vasario 15-ją, vadinamą Dešimtaine Diena (Decimal Day) – iki tos dienos anglų svaras turėjo 20 šilingų po tuziną pensų – 240 iš viso. Įdomus sutapimas – lygiai po pusės metų, 1971 metų rugpjūčio 15 dieną – nutiko Niksono Šoko (Nixon Shock) diena, kuomet JAV prezidentas Niksonas savavališkai panaikino Aukso standartą.

Ispanai senoviškai skaičiuoja iki penkiolikos: once, doce, trece, catorce, quince, tik 16 – jau dieciséis, „dešimtainiškai“, panašiai ir portugalai. Prancūzai dar turi ir 16 –



1 pav. Šešiasdešimtainiai skaičiai.

seize, taip pat „nedešimtainiškus“ 20 – vingt, 60 – soixante, 70 gi jų lūpose skamba labai „šešiasdešimtainiškai“ – soixante-dix, taip pat 80 – quatre-vingts.

2 Tarpupio skaičiai ir jų kilmės hipotezės

Tarpupio matematikai šešiasdešimtainiams skaičiams užrašyti naudojo tik du simbolius [1], vienetai nuo vieno iki devynių buvo užrašomi taip: Y, YY, YYY, $\ldots$, YYYYYYYYY, o dešimtys nuo vienos iki penkių – šitaip: $<, <<, \ldots, <<<<<$, žr. 1 pav.

Didesni skaičiai buvo užrašomi mums įprastu, rašant dešimtainius skaičius naudojamu, poziciniu principu: $Y <<$ galėjo reikšti 12, $12 \cdot 60$, $\frac{12}{60}$, $\frac{12}{60^2}$, priklausomai nuo pozicijos. Nulį žymėjo 45° kampu prieš laikrodį pasuktas simbolis YY, reiškęs „tuščią poziciją“ ir nenaudotas skaičiaus pabaigoje.

Sveikieji skaičiai ir trupmenos buvo rašomi analogiškai, kablelio analogo nebūta, jo vieta buvo suprantama iš konteksto.

Kodėl būtent 60, žymėtas simboliu $Y-$, imtas skaičiavimo sistemos pagrindu?

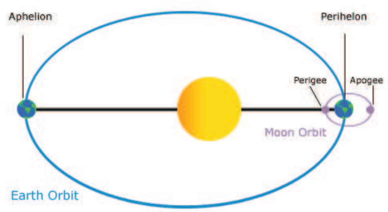
Populiariausias aiškinimas – todėl, kad $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ – mažiausias skaičius, besidalinantis iš 1, 2, 3, 4, 5, 6; jis taipogi dalinasi iš 10, 12, 15, 20 ir 30.

Kita versija – dėl skaičiavimo tuzinais atsiradusi sistema: $60 = 5 \cdot 12$, kur 5 – rankos pirštų skaičius.

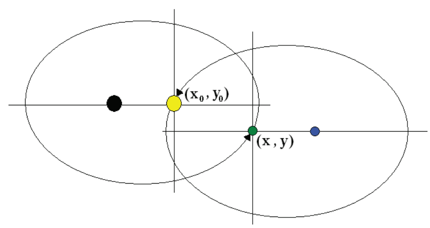
Otto E. Neugebauer spėjo [3], kad, akadams užkariavus šumerus, kurį laiką funkcionavo du piniginiai vienetai: mina ir šekelis, lygus 60-čiai minų (šekelis atsirado vėliau, akadai buvę semitais), vėliau tas santykis tapęs įprastu. Beje, Romos imperijoje 60 minų sudarė talentą (iš čia turime žodį „talentingas“), o, kaip svorio vienetas, mina senovėje buvusi lygi 600 gramų, vėliau, klasikinėj Antikoj, tapo artima dabartiniam svarui. Kurio angliškas vardas „pound“ kildinamas iš ten pat, iš kur mūsiškasis „pūdas“.

3 Žemės orbita, dualistinis elipsės lygties traktavimas

Babilonas paveldėjo šešiasdešimtainę skaičiavimo sistemą iš šumerų ir sykiu su dangaus kūnų stebėjimo lentelėmis perdavė graikų astronomams. Dar vėliau šešiasdešimtainę sistemą naudojo arabai, taip pat senovės bei viduramžių astronomai, pirmiausiai – trupmenoms užrašyti. Todėl viduramžių mokslininkai šešiasdešimtaines trupmenas vadino „astronominėmis“.



2 pav. Žemės ir mėnulio orbitos.



3 pav. Heliocentrinė ir geocentrinė sistemos.

Tai, kad Žemė sukasi apie Saulę elipsine orbita, žino toli gražu nebe didžioji dalis universiteto studentų – dauguma, paklausti, atsako, kad skriejame apskritimu, kurio centre – Saulė. Išties, internete Žemės orbita dažnokai vaizduojama su Saule orbitos centre.

Antrame paveikslėlyje matomą Žemės orbitos piešinį pirmuoju rodo Google paieška.

Jis įdomus tuo, kad jame, vis tik, Žemės orbita panaši į elipsinę ir tuo, kad taip pat pavaizduota Mėnulio orbita, apie kurią irgi kalbėsime, irgi elipsinė. Parašykime elipsės kanoninę lygtį, koordinačių pradžią sutapatinę su dešiniuoju židiniu, kuriame pavaizduota Saulė, o po to ją perrašykime, pastumdami židinį į tašką (x_0, y_0):

$$\frac{((x+c)-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

$c^2 = a^2 - b^2$ ir užrašykime šitaip:

$$\frac{((x_0-c)-x)^2}{a^2}+\frac{(y_0-y)^2}{b^2}=1.$$

Gauname heliocentrinės ir geocentrinės sistemų iliustracijas, žr. 3 pav.: kairiojoje orbitoje fiksuojame tašką (x_0, y_0), tuo pačiu ir Saulės padėtį, o taško (x, y), tapatinamo su Žeme, padėčiai leidžiame kisti, o dešiniojoje orbitoje elgiamės atvirkščiai.

Turime gražų dualizmo, apie kurį mokymo įstaigose mažai kalbama, pavyzdį: keičiasi orbitų židiniai (kairiojoje – dešinysis, dešiniojoje – kairysis) ir judėjimo orbitomis kryptys, piešinėlyje nurodytos rodyklėmis.

Žinantiems elipsės apibrėžimą turėtų kilti klausimas: kas antrajame Žemės orbitos židinyje?

Mokslas atsako: jame jokio fizinio kūno nėra.

4 pav. Naram–Sino Pergalės stela.

Astrologai su antruoju židiniu tapatina Juodąją Saulę, mokslo priskiriamą okultiniams simboliams.

Neaptarinėjant plačiau, mano nuomone, šios sąvokos paaiškinimas yra matematiškai įdomus ir pravartus žinoti. Tuo labiau, kad apie dvi Saules kalbama mūsų tautosakoje, o Luvre esančioje maždaug keturių tūkstančių metų senumo Akadijos valdovo Naram–Sino Pergalės steloje, saugomoje Luvre, Paryžiuje, matome du šviesulius, kurių dydis ir atstumas tarp jų atitinka Saulės ir atstumo tarp Žemės orbitos židinių proporcijas, žr. 4 pav.

4 Elipsės perimetras ir jos ekcentricitetas

Elipsės ilgio taip, kaip apskritimo, apskaičiuoti nemokame. Jis išreiškiamas antros rūšies elipsiniu integralu, neintegruojamu elementariosiomis funkcijomis:

$$l = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}\, dt = 2\pi a E,$$

čia $\epsilon = \frac{c}{a}$ – elipsės ekscentricitetas, apibūdinantis jos formą. Išskleisti integralą E Makloreno eilute ϵ laipsniais pavyksta:

$$E = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \epsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\epsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{\epsilon^6}{5} - \cdots .$$

Kai $\epsilon = 0$, gauname apskritimo ilgio formulę.

Skelbiama, kad Žemės orbitos ekscentricitetas keičiasi. Kolmogorovo-Arnoldo-Moserio (KAM) teorijos [5] esmę galima formuluoti taip: „jei planetų masės pakankamai mažos, jų orbitų ekscentricitetai ir posvyriai maži, tai daugumai pradinių duomenų (išskyrus rezonansinius ir artimus jiems) planetų judėjimas bus sąlyginai periodinis, ekscentricitetai ir posvyriai bus maži, o didžiosios orbitų pusašės be galo svyruos netoli pradinių reikšmių“.

Kalbama apie tris kūnus. Trijų kūnų uždavinys neišspręstas. Istoriškai trijų kūnų uždavinys siejamas su Saulės, Žemės ir Mėnulio judėjimu. Žemės orbitą stipriai veikia Jupiterio ir Saturno judėjimas. Saulės sistemoje stebimi rezonansiniai reiškiniai.

Dabartinis vidutinis Žemės orbitos ekscentricitetas [4] 0.01671022 labai artimas $\frac{1}{60} = 0.016666\ldots$. Skelbiama, kad Žemės orbita keičiasi, darydamasi labiau suplota, taigi, jos ekscentricitetas didėja. Jei taip, kažkada jis buvęs artimesnis dydžiui $\frac{1}{60}$. Pateiktoje Makloreno eilutėje įrašę $\epsilon = \frac{1}{60}$, gautume mūsų Žemės aplink Saulę kasmet nukeliaujamo kelio ilgį (padalintą iš skaičiaus $2\pi a$), išreikštą dydžio $\frac{1}{60}$ laipsniais. Integralo E išraiškoje esantį vienetą užrašę

$$1 = \frac{59}{60} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{60}} = \frac{59}{60} \cdot \left(1 + \frac{1}{60} + \frac{1}{60^2} + \frac{1}{60^3} + \cdots\right)$$

gauname E išraišką laipsnine eilute su teigiamais koeficientais bei turinčią ir lyginius, ir nelyginius laipsnius. Pertvarkyti ją į eilutę su sveikaisiais koeficientais irgi įmanoma. Suprantama, kalbama apie principinę galimybę, nepamirštant E daugiklio $2\pi a$ bei Žemės judėjimo orbita linijinio greičio galimų pokyčių, lygiai kaip ir minėtų pačios orbitos pokyčių.

Naujosios Babilonijos, prieš 2600 metų, astronomų metai buvo lygūs

$$6 : 5 : 14 : 44 : 51 = 6 \times 60 + 5 + \frac{14}{60} + \frac{44}{60^2} + \frac{51}{60^3} \text{ dienoms.}$$

Mikalojus Kopernikas, paskelbęs heliocentrinę teoriją, metus skelbė esant lygius

$$365^\circ 15' 24'' 10''' = 365 + \frac{15}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{10}{60^3} \text{ dienoms.}$$

Šešiasdešimtainiai skaitmenys, einantys po kablelio latinizuojant skaitomi: $'$ – prima, arba minutė – „mažas dydis“, $''$ – sekundė, $'''$ – tercija, $^{\mathrm{IV}}$ – kvarta, $^{\mathrm{V}}$ – kvinta, ir t. t. Pirmieji pavadinimai sutampa su dabartiniais laiko matavimo vienetais – minutėmis, sekundėmis, tik nėra valandų. Senajame astronominiame laiko skaičiavime valandų, paprasčiausiai, nebuvo. Senoji minutė reiškė 24 dabartines minutes. Šri-Lankos sinhalai iki šiol parą dalina į 60 peya.

Paros dalinimas į 24 valandas aiškinamas pradiniu jos dalinimu į dieną ir naktį, kiekvieną jų dalinant į dvylika dalių pagal Mėnulio ciklų skaičių metuose. Mėnulį išties stebime kas parą, mėnulio mainymosi ciklas trunka 29,5 paros ir yra artimas mūsų dabartiniam mėnesiui.

Mėnesių turime tuziną, $5 \times 12 = 60$.

Gematrija [6] – vienas iš trijų „slaptosios žodžių prasmės“ atskleidimo metodų, suteikiant žodžiams bei raidėms skaitines reikšmes, plačiai naudojamas kabalistiniuose tekstuose hebrajų ir aramėjų kalbose. Hebrajiškas žodis Chai (Hebrew hai) – „gyvenimas“ – turi skaitinę reikšmę, lygią 18. 18 – laimingas skaičius žydams, jie ne tik dovanoja pinigų sumas, besidalijančias iš 18, bet ir Ievos vardą – Chava – sieja su Chai. Krikščioniškų Velykų data kilnojama priklausomai nuo pirmosios Mėnulio pilnaties po pavasario lygiadienio datos, pagal kurią žydai nustato jų išėjimui iš Egipto paminėti skirtos Pesach šventės datą. Mūsuose mažai žinoma, kad semitų paros pradžia yra saulėlydis.

Įdomu tai, kad dabartinės Mėnulio orbitos aplink Žemę vidutinis ekscentricitetas apytiksliai lygus [4] 0,0549006, o jam atvirkščias skaičius yra 18,21473718.

Žemės spindulys 6378 km [4], Mėnulis gi nutolęs nuo Žemės vidutiniškai 384400 km, arba 60.26967701 Žemės spindulių atstumu.

Literatūra

[1] G. Ifrah. *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*. John Wiley and Sons, 2000.

[2] *Lietuvos istorijos paminklai*. Mintis, Vilnius, 1990.

[3] O. Neugebauer. *The Exact Sciences in Antiquity*. Princeton University Press, 1952.

[4] *NASA Planetary Fact Sheet*. Available from Internet: http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/.

[5] J. Pöschel. A lecture on the classical KAM-theorem. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **69**, 2001.

[6] S. Sambursky. On the origin and significance of the term gematria. *J. Jew. Stud.*, **29**(2), 1978.

SUMMARY

Vitality of the sexagesimal system

E. Paliokas

Some aspects in teaching mathematics are observed for the purpose of revitalizing mathematics adding historical and semantic points of view. Hypothesis of arrising of the sexagesimal system is presented.

Keywords: sexagesimal system, ellipse, eccentricity, elliptic integral, movement of celestial bodies, three body problem, geocentric, heliocentric system.