Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 169–174

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

2012 m. LEU Jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga

Eglė Jakaitytė[1], Algirdas Kaučikas[2,3], Edmundas Mazėtis[3]

[1] *Nacionalinė M.K. Čiurlionio menų mokykla*
T. Kosciuškos g. 11, LT-01100 Vilnius
[2] *Mykolo Romerio universitetas, Socialinės informatikos fakultetas*
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
[3] *Lietuvos edukologijos universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius
E. paštas: egle.jakaityte@gmail.com, algirdas.kaucikas@mruni.lt
E. paštas: edmundas.mazetis@vpu.lt

Santrauka. Straipsnyje aptariami 2012 m. LEU jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai ir jų sprendimai.

Raktiniai žodžiai: matematikos olimpiados, uždavinių sprendimas.

1 Įvadas

Siekdami, kad į Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadas patektų visi stipriausieji, olimpiadų organizatoriai nusprendė vykdyti atrankines olimpiadas, kuriose galėtų dalyvauti visi norintieji, iš kurių galima būtų atrinkti pačius geriausius. Tokie atrankiniai turai vykdomi nuo 1992 metų. Tai Kauno Technologijos universiteto prof. J. Matulionio konkursas, Šiaulių universiteto matematikų olimpiada ir Vilniaus pedagoginio universiteto (dabar – Lietuvos edukologijos universiteto) jaunųjų matematikų olimpiada.

2012 m. kovo 10 d. vyko XXI jaunųjų matematikų olimpiada. Užduotis parengė docentai A. Kaučikas ir E. Mazėtis.

Olimpiadoje dalyvavo apie 130 9–12 klasių moksleivių. Tarp dalyvių buvo moksleivių, jau pasižymėjusių ne tik Lietuvos, bet ir tarptautinėse olimpiadose. Dešimt dalyvių (po 2–3 iš kiekvienos klasės) buvo pakviesti į Lietuvos mokinių matematikos olimpiadą.

2 IX klasė

1. *Prie triženklio skaičiaus pridėjus* 3*, jo skaitmenų suma sumažėja* 3 *kartus. Raskite visus tokius skaičius.*

Tegul skaičius yra $A=\overline{xyz}$, čia x, y, z yra jo skaitmenys. Aišku, kad $z\geqslant 7$, kitaip pridėjus 3, skaitmenų suma padidėtų. Toliau laikysime, kad $z\geqslant 7$. Įrodysime, kad $y\neq 9$. Trys atvejai, kai $A=\overline{99z}$ patikrinami tiesiogiai.

Tegul $A = \overline{x9z}$, su $x \leqslant 8$. Tada $x+9+z = 3(x+1+(z+3-10))$. atlikus veiksmus gauname, kad $2x+2z = 27$ – prieštara. Taigi $y \leqslant 8$ ir $z \geqslant 7$. Gauname sąlygą:

$$x+y+z = 3\bigl(x+(y+1)+(z+3-10)\bigr).$$

Atlikus veiksmus gauname, kad $x+y+z = 9$. Taigi $z \neq 9$. Imdami $z = 7$ gauname, kad duotasis skaičius yra 117 ir 208. Imdami $z = 8$, gauname trečiąjį skaičių 108.

Atsakymas: 108, 117, 208.

2. *Išspręskite lygtį:*

$$\sqrt{x-4\sqrt{x}+4}+\sqrt{x-6\sqrt{x}+9} = 1.$$

Akivaizdu, kad $x-4\sqrt{x}+4 = (\sqrt{x}-2)^2$ ir $x-6\sqrt{x}+9 = (\sqrt{x}-3)^2$. Kadangi su visais $a \in R$ galioja lygybė $\sqrt{a^2} = |a|$, lygtis ekvivalenti šiai lygčiai

$$|\sqrt{x}-2|+|\sqrt{x}-3| = 1.$$

Kai $\sqrt{x} < 2$, $|\sqrt{x}-2| = -\sqrt{x}+2$ ir $|\sqrt{x}-3| = -\sqrt{x}+3$. Įrašę šias išraiškas į lygtį, gauname, kad $\sqrt{x} = 2$ – prieštara.

Analogiškai, kai $\sqrt{x} > 3$, tada $|\sqrt{x}-3| = \sqrt{x}-3$ ir $|\sqrt{x}-2| = \sqrt{x}-2$, ir iš lygties seka, kad $\sqrt{x} = 3$, prieštara. Liko atvejis $2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$. Tada $|\sqrt{x}-2| = \sqrt{x}-2$ ir $|\sqrt{x}-3| = -\sqrt{x}+3$. Įrašę į lygtį gauname, kad lygtis tampa tapatybe su visais tokiais x. Taigi lygties sprendiniai yra visi $x \in [4;9]$.

Atsakymas: $x \in [4;9]$.

3. *Įrodykite, kad su visais* x, y *iš intervalo* $[0;1]$ *teisinga nelygybė*

$$\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}}+\frac{y}{\sqrt{2x^2+3}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Kadangi nelygybė simetriška x ir y atžvilgiu, tai galime tari, kad $x \leqslant y$. Tuomet,

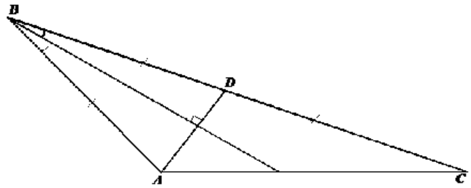
$$\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}}+\frac{y}{\sqrt{2x^2+3}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+3}}.$$

Iš čia seka, kad reikia įrodyti nelygybę $\frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+3}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}}$. Ją pertvarkę, gauname, kad ji ekvivalenti tokiai nelygybei: $\sqrt{5}(x+1) \leqslant 2\sqrt{2x^2+3}$ arba $3x^2-10x+7 \geqslant 0$. Bet ši nelygybė yra teisinga su visais $x \in [0;1]$, nes kvadratinio trinario šaknys yra 1 ir $2\frac{1}{3}$.

4. *Trikampio ABC kraštinių ilgiai yra* 3 *iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Iš viršūnės A nubrėžta pusiaukraštinė yra statmena kampo B pusiaukampinei. Raskite trikampio kraštinių ilgius.*

Pastebime, kad ΔABC – lygiašonis (1 pav.). Kadangi $AB = BD$, tai $BC = 2AB$, t. y. arba $BC = 2$, o $AB = 1$, arba $BC = 4$, o $AB = 2$. Pagal sąlygą, abiem atvejais $AC = 3$, bet trikampis, kurio kraštinių ilgiai $1, 2$ ir 3 neegzistuoja.

Atsakymas: trikampio kraštinių ilgiai yra 2, 3 ir 4.



1 pav.

3 X klasė

1. *Turime aritmetinę progresiją $a, b,]ldots$ ir geometrinę progresiją $a, b, \ldots$ $(a \neq b)$. Žinome, kad trečiasis geometrinės progresijos narys b_3 yra lygus aritmetinės progresijos dešimtajam nariui a_{10}. Kuriam aritmetinės progresijos nariui lygus ketvirtasis geometrinės progresijos narys b_4?*

Kadangi $a = a_1 = b_1$ ir $b = a_2 = b_2$, gauname, kad $a+d = a \cdot q$. Iš sąlygos $b_3 = a_{10}$ seka, kad $a(q^2-1) = 9d$ ir $d = a(q-1)$. Taigi $a(q^2-1) = a(q-1)(q+1) = 9d = d(q+1)$.

Iš sąlygų $b = a + d$ ir $a \neq b$ gauname, kad $d \neq 0$. Taigi $9 = q + 1$ ir $q = 8$. Iš čia $b_4 = aq^3 = a(q^3 - 1) + a = a + a(q - 1)(q^2 + q + 1) = a + d \cdot 73 = a_{74}$.

Atsakymas: $b_4 = a_{74}$.

2. *Raskite didžiausią reiškinio $\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}} + \frac{y}{\sqrt{2x^2+3}}$ reikšmę, kai x, y yra intervale* $[0; 1]$.

Pastebime, kad kai $x = y = 1$, reiškinio reikšmė lygi $\frac{2}{\sqrt{5}}$. IX klasės 3 uždavinio sprendime įrodyta, kad didesnių reikšmių reiškinys įgyti negali.

Atsakymas: $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. *Tarp dviejų vienodų dviženklių skaičių įrašomas dvigubai didesnis dviženklis skaičius. Gautasis šešiaženklis skaičius yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Raskite visus tokius dviženklius skaičius.*

Tarkime, kad duotasis dviženklis skaičius lygus a, $10 \leqslant a \leqslant 50$, tuomet gautasis skaičius $A = 10000 \cdot a + 100 \cdot 2a + a = 10201a = 101^2 a$. Taigi skaičius a yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Iš čia seka, kad a gali būti: 16, 25, 36 arba 49.

Atsakymas: 16, 25, 36 ir 49.

4. *Stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgių santykis $AD : AB = 3$. Kraštinėje AD yra toks taškas E, kad $AE : ED = 2$. Raskite kampą tarp tiesių AC ir BE.*

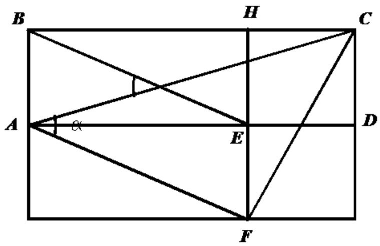
Sakykime, kad $AB = a$, tada $AD = 3a$, $AC = \sqrt{10}a$. Pastumiame atkarpą BE vektoriumi $\boldsymbol{BA}$ ir gauname atkarpą $AF = BE = CF = \sqrt{5}a$ (2 pav.). Pagal kosinusų teoremą ΔACF turime: $\cos\angle CAF = \frac{AC^2+AF^2-CF^2}{2AC \cdot AF} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Beliko pastebėti, kad $\angle CAF$ lygus ieškomajam kampui tarp tiesių AC ir BE.

Atsakymas: 45^0.

4 XI klasė

1. *Įrodykite, kad su visais teigiamais skaičiais x, y, z teisinga nelygybė*

$$\frac{x^3}{y \cdot z} + \frac{y^3}{z \cdot x} + \frac{z^3}{x \cdot y} \geqslant x + y + z.$$



2 pav.

Pritaikius nelygybę, siejančią teigiamųjų skaičių aritmetinius ir geometrinius vidurkius, gauname:

$$\frac{x^3}{y\cdot z}+y+z\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^3}{y\cdot z}\cdot y\cdot z}=3x.$$

Analogiškai:

$$\frac{y^3}{z\cdot x}+z+x\geqslant 3y \quad \text{ir} \quad \frac{z^3}{x\cdot y}+x+y\geqslant 3z.$$

Sudėję šias tris nelygybes ir sutraukę panašiuosius narius, gauname, kad įrodomoji nelygybė teisinga.

2. *Turime aritmetinę progresiją $a, b, \ldots$ ir geometrinę progresiją $a, b, \ldots,$ $(a \neq b)$. Žinome, kad trečiasis geometrinės progresijos narys b_3 yra lygus aritmetinės progresijos dešimtajam nariui a_{10}. Kuriam aritmetinės progresijos nariui lygus ketvirtasis geometrinės progresijos narys b_4?*

Žr. X klasės 1 uždavinį.

3. *Išspręskite lygčių sistemą*

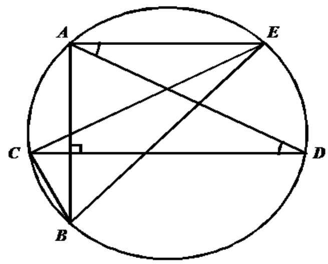
$$\begin{cases} x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=-\frac{17}{4},\\ y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=-\frac{5}{4},\\ z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=-5. \end{cases}$$

Atskliaudus kairiąsias puses ir pažymėjus $\frac{xy}{z}=a$, $\frac{xz}{y}=b$, $\frac{yz}{x}=c$, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a+b=-\frac{1}{4},\\ a+c=-\frac{5}{4},\\ b+c=-5. \end{cases}$$

Sudedant po dvi jos lygtis ir atimant trečiąją, gauname, kad $a=-\frac{1}{4}$, $b=-4$, $c=-1$. Taigi $ab=x^2=1$, $ac=y^2=\frac{1}{4}$ ir $bc=z^2=4$. Matome, kad $xyz<0$, ir iš čia gauname keturis sprendinius.

Atsakymas: $(1;-\frac{1}{2};2)$, $(1;\frac{1}{2};-2)$, $(-1;\frac{1}{2};2)$, $(-1;-\frac{1}{2};-2)$.



3 pav.

4. *Apskritime nubrėžtos stačiu kampu susikertančios stygos AB ir CD, be to, $AD = m$, $BC = n$. Raskite apskritimo spindulį.*

Brėžiame stygą AE, lygiagrečią su styga CD (3 pav.). Kadangi lankai AC ir ED lygūs, tai lygūs ir lankai CAE ir DEA. Iš čia seka, kad $CE = AD = m$. Kadangi tiesės AB ir AE statmenos, tai atkarpa BE – apskritimo skersmuo. Todėl $\angle BCE = 90^0$. Tuomet $BE^2 = BC^2 + CE^2 = m^2 + n^2$. Iš čia spindulys $r = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$.

Atsakymas: $r = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$.

5 XII klasė

1. *Įrodykite, kad su visais teigiamais skaičiais x, y, z teisinga nelygybė*

$$\frac{x^3}{y\cdot z} + \frac{y^3}{z\cdot x} + \frac{z^3}{x\cdot y} \geqslant x + y + z.$$

Žr. XI klsės 1 uždavinį.

2. *Išspręskite lygčių sistemą*

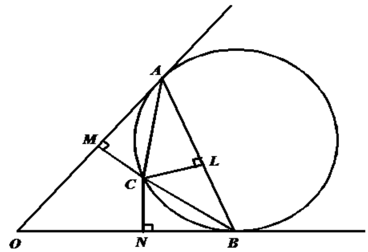
$$\begin{cases} x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) = -\frac{17}{4}, \\ y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) = -\frac{5}{4}, \\ z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) = -5. \end{cases}$$

Žr. XI klasės 3 uždavinį.

3. *Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus, turinčius savybę: prie bet kurių dviejų iš jų sandaugos pridėjus vienetą, gautasis skaičius dalijasi iš trečiojo skaičiaus.*

Sakykime, kad ieškomąjį trejetą sudaro skaičiai $a \leqslant b \leqslant c$. Jei $a = 1$, tada iš sąlygos $a\cdot b + 1 = c\cdot k$ gauname, kad $c \leqslant b + 1$. Taigi $b \leqslant c \leqslant b + 1$. Jei $c = b$, iš jau nurodytų sąlygų seka, kad $b = c = 1$ ir gauname sprendinį $\{1; 1; 1\}$. Jei $c = b + 1$, tai iš sąlygos $ac + 1 = b\cdot l$, gauname, kad $l = \frac{b+2}{b} \in N$. Taigi $b = 1$ arba $b = 2$ ir gauname dar du uždavinio sprendinius $\{1; 1; 2\}$ ir $\{1; 2; 3\}$.

Pastebėkime, kad skaičiai a, b, c yra poromis tarpusavyje pirminiai: jei, tarkime, a ir b turi bendrą daliklį d, tai iš jau nurodytos sąlygos $a\cdot c + 1 = b\cdot l$, gauname, kad



4 pav.

$d = 1$. Todėl, kai $a \geqslant 2$, galioja griežtos nelygybės $a < b < c$. Tolaiu laikysime, kad $a \geqslant 2$. Įrodysime, kad tada $b = 3$. Jei $b \geqslant 4$, tada $c \geqslant 5$ ir $abc \geqslant 40$.

Analizuosime reiškinį $S = ab + bc + ca + 1$. Akivaizdu, kad skaičius S dalijasi iš kiekvieno iš skaičių a, b, c. Kadangi šie skaičiai yra poromis tarpusavyje pirminiai, tai S dalijasi iš $a \cdot b \cdot c$, todėl $abc \leqslant S$. Iš nelygybių $\frac{a}{2} \geqslant 1$, $\frac{b}{4} \geqslant 1$, $\frac{c}{5} \geqslant 1$ gauname, kad $ab \leqslant \frac{abc}{5}$, $bc \leqslant \frac{abc}{2}$, $ca \leqslant \frac{abc}{4}$. Taigi $S \leqslant \frac{19}{20}abc + 1$. Kadangi $abc \geqslant 40$, gauname, kad $\frac{19}{20}abc + 1 < abc$, vadinasi, kai $b \geqslant 4$, $S < abc$ – prieštara. Kai $b = 3$, tada $a = 2$ ir $c = 7$. Gavome dar vieną uždavinio sprendinį $\{2; 3; 7\}$.

ATSAKYMAS: $\{1; 1; 1\}$, $\{1; 1; 2\}$, $\{1; 2; 3\}$, $\{2; 3; 7\}$.

4. *Apskritimas liečia kampo POQ kraštines OP ir OQ atitinkamai taškuose A ir B. Taškas C yra mažesniojo lanko AB taškas, nutolęs nuo tiesių OP ir OQ atstumais, lygiais a ir b. Raskite taško C atstumą iki tiesės AB.*

Iš taško C nuleidžiame statmenis CM, CN ir CL atitinkamai į tieses OA, OB ir AB (4 pav.). Kadangi $\angle CBL = \angle CAM$, tai $\Delta CMA \sim \Delta CLB$. Iš čia seka, kad $\frac{CM}{CL} = \frac{CA}{CB}$. Analogiškai $\Delta CAL \sim \Delta CBN$, todėl teisinga lygybė: $\frac{CL}{CN} = \frac{CA}{CB}$. Iš čia gauname, kad $\frac{CM}{CL} = \frac{CL}{CN}$, t. y. $CL^2 = CM \cdot CN = a \cdot b$.

ATSAKYMAS: $CL = \sqrt{ab}$.

Literatūra

[1] A. Grincevičius ir J. Mačys. *Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai.* Šviesa, Kaunas, 1990.

[2] J. Kubilius. *Olimpiadinis matematikos uždavinynas.* Šviesa, Kaunas, 1972.

[3] J. Mačys. *Olimpiadinis matematikos uždavinynas.* TEV, Vilnius, 2003.

SUMMARY

Survey of LEU olympiad 2012 for young mathematicians
E. Jakaitytė, A. Kaučikas, E. Mazėtis

The texts and solutions of the LEU young mathematicians olympiad – 2012 are presented.

Keywords: mathematical olympiads, problem solving.