

# Nuo prekių kainos priklausantis vėlavimas Kaleckio modelyje

Raimondas Barzdžiukas, Rasa Eitkevičiūtė, Osvaldas Švitra

*Klaipėdos universitetas, Gamtos ir matematikos mokslų fakultetas*

H. Manto 84, LT-92294 Klaipėda

E. paštas: logit2@inbox.lt, rasele.eit@gmail.com, svitra@yahoo.com

**Santrauka.** Straipsnyje tiriami ekonomikos augimo modeliai, kuriuose vėlavimas priklauso nuo ieškomo sprendinio t. y. prekių kainos.

**Raktiniai žodžiai:** stabilus periodinis sprendinys, bifurkacijų teorija, diferencialinės lygtys su vėlavimu.

## 1 Nagrinėjami modeliai

Tegul  $P(t)$  – prekės kaina,  $r$  – tiesinis prekių kainos augimo greitis,  $h$  – pastovus vėlavimas tarp paklausos ir pasiūlos, esant nusistovėjusiai prekės kainai  $P_*$ , parametras  $a \in [0; 1)$ . Tada rinkos prekių kainų dinamiką galima aprašyti [1] lygtimi

$$\dot{P} = r \left[ 1 - \frac{P(t - \Delta(P))}{P_*} \right] P, \quad (1)$$

kur

$$\Delta(P) = h \exp \left[ a \left( 1 - \frac{P}{P_*} \right) \right]. \quad (2)$$

Remiantis bifurkacijų teorija diferencialinėms lygtims su vėlavimu [3] darbe [5] parodyta, kad jei  $rh = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \ll 1$ ) ir  $0 \leq a < 1$ , diferencialinės lygties (1) pusiausvyros būsenos  $P(t) \equiv P_*$  aplinkoje turės vienintelį stabilų periodinį sprendinį

$$P(t) \equiv P_* \left[ 1 + \xi \cos \frac{\pi}{2} \tau + \xi^2 x_2(\tau) + O(\xi^3) \right], \quad (3)$$

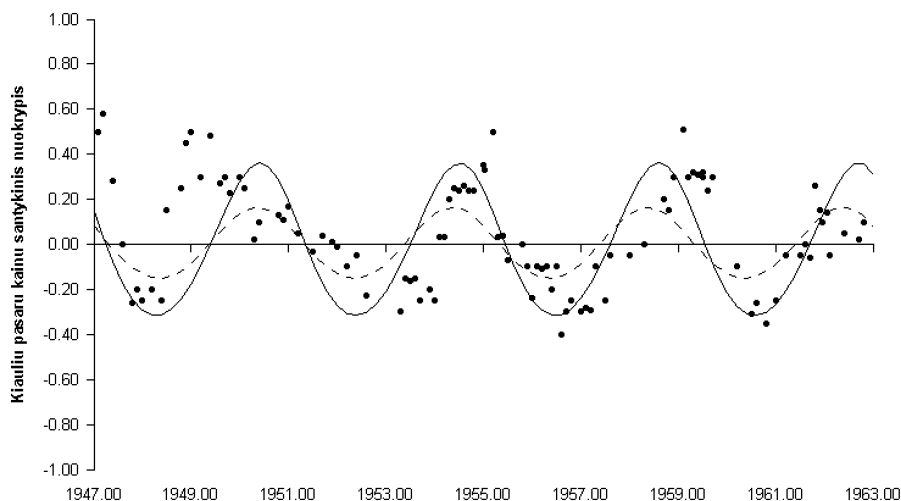
kur

$$\xi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}}, \quad \tau = \frac{t}{(1 + c_2 \xi^2)h}, \quad (4)$$

$$x_2(\tau) = -\frac{1}{4}a\pi + \frac{1}{10}(1 - a\pi) \sin \pi\tau + \frac{1}{20}(4 + a\pi) \cos \pi\tau, \quad (5)$$

$$b_2 = \frac{1}{80} [6\pi - 4 + 4\pi(1 + \pi)a - 5\pi(3 + \pi)a^2],$$

$$c_2 = \frac{1}{40\pi} [4 - 4\pi a + 5\pi(3 + \pi)a^2]. \quad (6)$$



1 pav. Tikslus lygties (1) sprendinys  $\frac{P(t)-P_*}{P_*}$ , kai  $r = 1.575$ ,  $h = 1$ ,  $a = 0.02$  pavaizduotas ištisine linija, o artutinis apskaičiuotas pagal formules (3)–(6) – punktyrine.

Modifikuotas Kaleckio [2] modelis

$$\dot{P}(t) = rP(t-h) \left[ 1 - \frac{P(t-h)}{P_*} \right] \quad (7)$$

teoriškai ištirtas darbe [7], o tikslus skaitinis lygties (7) sprendinys gautas autorių darbe [1]. Jei vėlavimas lygtyje (7) nėra pastovus, o priklauso nuo sprendinio, tai gausime [7] modelį

$$\dot{P} = rP(t - \Delta(P)) \left[ 1 - \frac{P(t - \Delta(P))}{P_*} \right]. \quad (8)$$

Jei priklausomybė  $\Delta(P)$  – parenkama pagal formulę (2), tai iš bifurkacijų teorijos seka, kad pusiausvyros būsenos  $P(t) \equiv P_*$  aplinkoje egzistuoja stabilus periodinis sprendinys.

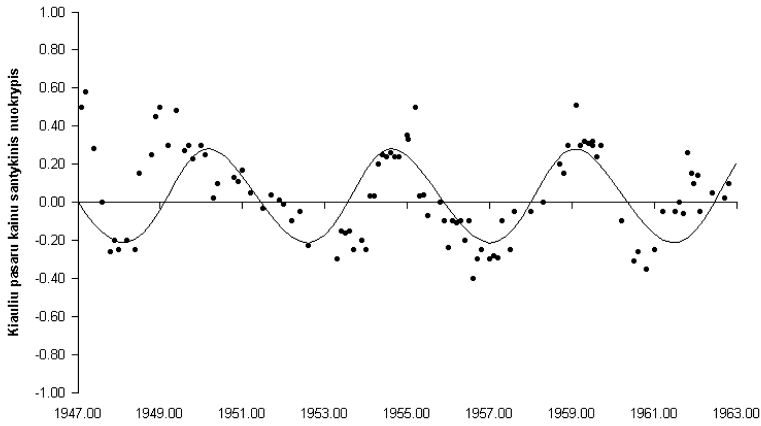
## 2 Skaitinė analizė

A. Larsonas darbe [4] aprašė kiaulienos gamybą, paršavedžių skaičiaus kitimą ir pašarų kainos kitimą 1947–1963 m. ir pastebėjo, kad nagrinėjamo proceso dinamikoje egzistuoja 4-mečiai ciklai 1–2 pav.

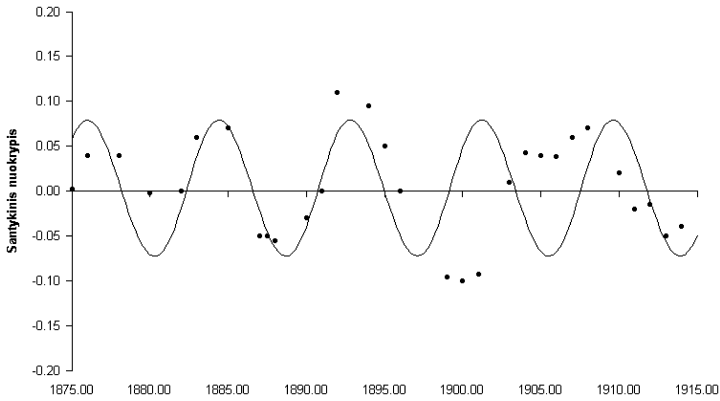
Ekonomikoje „viskas yra prekė ir turi savo kainą“ 3–6 pav. modelio (8) tikslūs skaitiniai sprendiniai palyginti su taip vadinamais 9 metų verslo ciklais, pateiktais Timbergeno darbe [9] ir Klaipėdos uosto ataskaitose apie krovos apimtis.

## 3 Išvados

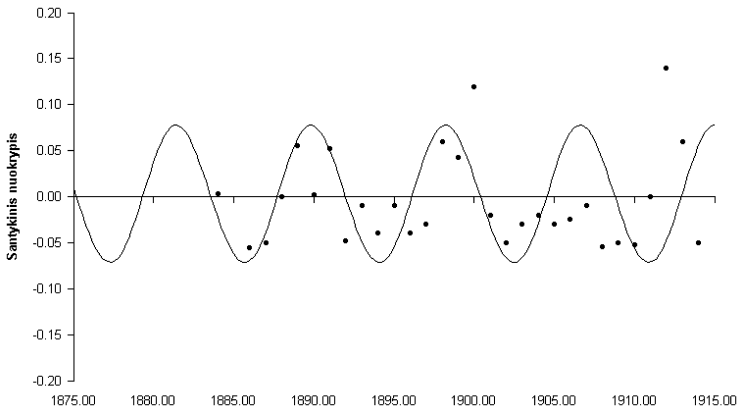
Atlikta pasiūlytų darbe [7] matematinių modelių skaitinė analizė. Gauti periodiniai sprendiniai palyginti su 9 metų verslo ciklais, išanalizuotais J. Timbergeno [9], ir



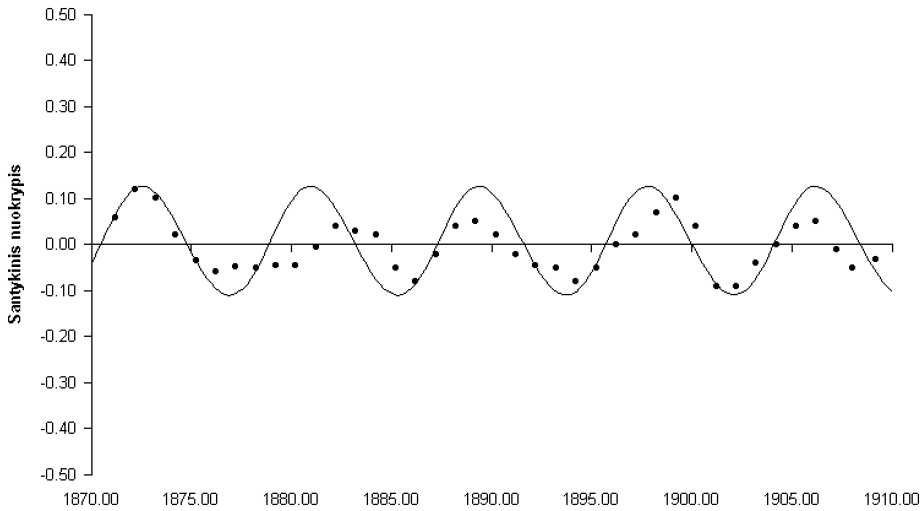
2 pav. Tikslus lygties (8) sprendinys  $\frac{P(t)-P_*}{P_*}$ , kai  $r = 1.52$ ,  $h = 1$ ,  $a = 0.1$ , pavaizduotas ištisinė linija.



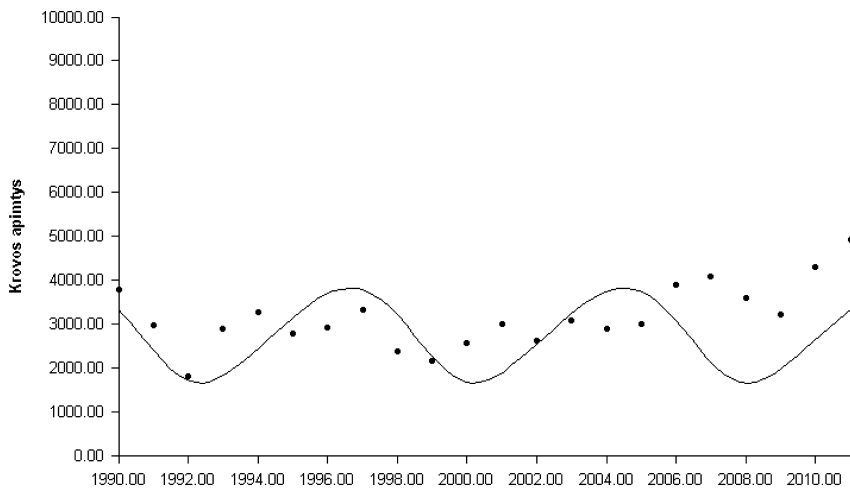
3 pav. Bedras tonažas JAV, DBr., [8] kai  $r = 0.754$ ,  $h = 1.9$ ,  $a = 0.1$ .



4 pav. Krovos apimtys JAV, DBr., [8] kai  $r = 0.752$ ,  $h = 1.9$ ,  $a = 0.1$ .



5 pav. Plieno gamyba Vokietijoje [9], kai  $r = 0.76$ ,  $h = 1.9$ ,  $a = 0.1$ .



6 pav. Klaipėdos uosto ro-ro priemonių krovimo apimtys, kai  $r = 0.95$ ,  $h = 1.9$ ,  $a = 0.1$ .

su Klaipėdos uosto ataskaitose užfiksuota cikline ro-ro krovos dinamika. Siūlomi modeliai paaiškina tokių ciklų atsiradimo priežastis.

## Literatūra

- [1] R. Barzdžiukas, R. Eitkevičiūtė ir O. Švitra. Ekonomikos augimo modelis su vėlavimu. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **53**, 2012.
- [2] M.A. Kalecky. Macroeconomic theory of business cycles. *Econometrica*, **3(3)**:327–344, 1935.

- [3] J. Kolesovas and D. Švitra. *Autosvyravimai sistemose su vėlavimu*. Mokslas, Vilnius, 1979 (in Russian).
- [4] A.B. Larson. The hog cycle as harmonic motion. *J. Farm Econ.*, **46**:375–386, 1964.
- [5] D. Švitra. Some modifications of the hatchinson equation. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **27**(1):181–194, 1987.
- [6] D. Švitra. *Dynamics of Physiological System*. Mokslas, Vilnius, 1989 (in Russian).
- [7] D. Švitra. Vėlavimas ir ekonominių sistemų dinamika. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **53**, 2012.
- [8] J. Timbergen. Ein schiffbauzyklus? *Weltwirtschaftliches Archiv*, **34**:152–164, 1931.
- [9] J. Timbergen. Statistical evidence on the acceleration principle. *J. Econ., New Ser.*, **18**(5):164–176, 1938.

## SUMMARY

**Delay dependent from the goods of the price in the Kaleckian model***R. Barzdžiukas, R. Eitkevičiūtė, O. Švitra*

In this article we investigate models of economical growth, where delay depends on appropriate solutions, i.e., prices of goods.

*Keywords:* stable periodic solution, theory of bifurcation, differentials equations with delay.