

# Ekonomikos augimo modelis su vėlavimu

Raimondas Barzdžiukas, Rasa Eitkevičiūtė, Osvaldas Švitra

*Klaipėdos universitetas, Gamtos ir matematikos mokslų fakultetas*

H. Manto 84, LT-92294 Klaipėda

E. paštas: logit2@inbox.lt, rasele.eit@gmail.com, svitra@yahoo.com

**Santrauka.** Straipsnyje nagrinėjamas netiesinis produkcijos augimo modelis su vėlavimu. Netiesinėje analizėje gauti rezultatai palyginti su realiais duomenimis.

**Raktiniai žodžiai:** gamybos proceso matematinis modeliavimas, diferencialinės lygtys, stabilus periodinis sprendinys.

## 1 Modelio formulavimas

Tegul  $P(t)$  – produkcijos kiekis laiko momentu  $t$ ,  $h$  – laikas, reikalingas tai produkcijai pagaminti,  $r$  – produkcijos gamybos greitis,  $P_*$  – ribinė pusiausvyros būseną.

Produkcijos dinamiką aprašysime (1) diferencialine lygtimi:

$$\dot{P}(t) = rP(t-h) \left[ 1 - \frac{P(t-h)}{P_*} \right]. \quad (1)$$

Remiantis bifurkacijų teorija diferencialinėms lygtims su vėlavimu [4] darbe [3] parodyta, kad, jei  $0 < rh - \frac{\pi}{2} = \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), diferencialinė lygtis (1) pusiausvyros būsenos  $P = P_*$  aplinkoje turi vienintelį stabilų periodinį sprendinį:

$$P(t) = P_* \left[ 1 + \xi \cos \frac{\pi}{2} \tau + \xi^2 x_2(\tau) + O(\xi^3) \right], \quad (2)$$

kur:

$$\xi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}}, \quad \tau = \frac{t}{h(1 + c_2 \xi^2)}, \quad (3)$$

$$x_2(\tau) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \sin(\pi\tau) - \frac{1}{10} \cos(\pi\tau), \quad (4)$$

$$b_2 = \frac{11\pi - 4}{20}, \quad c_2 = \frac{2}{5\pi}. \quad (5)$$

Kitas matematinis modelis produkcijos dinamikai aprašyti galėtų būti taip vadinama logistinė lygtis su vėlavimu:

$$\dot{P}(t) = rP \left[ 1 - \frac{P(t-h)}{P_*} \right]. \quad (6)$$

Lygtis (6) pirmą kartą pilnai iširta darbe [2]. Lygtis (6) pusiausvyros būsenos aplinkoje turi [2, 4] vienintelį stabilų sprendinį (2)–(3), kur:

$$x_2(\tau) = \frac{1}{10}(\sin \pi\tau + 2 \cos \pi\tau), \tag{7}$$

$$b_2 = \frac{3\pi - 2}{40}, \quad c_2 = \frac{1}{10\pi}. \tag{8}$$

Dar tikslesnė asimptotinė periodinio sprendinio išraiška pateikta darbe [2].

## 2 Skaitinė analizė ir palyginimas su realiais duomenimis

Skaitinė analizė atlikta programa „Modél Maker“ naudojant Rungės–Kuto IV eilės metodą.

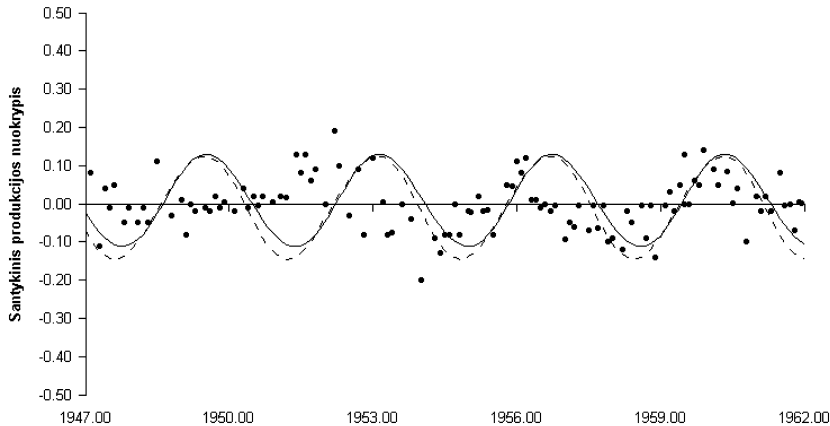
A. Larsonas [2] aprašė kiaulienos gamybą 1947–1963 m. ir pastebėjo ciklinį produkcijos kitimą su 4 metų periodu. Pav. 1 palyginta modelio (1) tikslus skaitinis sprendinys ir artutinis periodinis sprendinys (2) su A. Larsono duomenimis.

Pav. 2 ir pav. 4 analogiški palyginimai atlikti su duomenimis apie Klaipėdos uosto ro–ro priemonių krovos apimtis 1990–2011 m. Matome, kad krovos apimtys periodiškai kinta su periodu  $T \approx 8m$ .

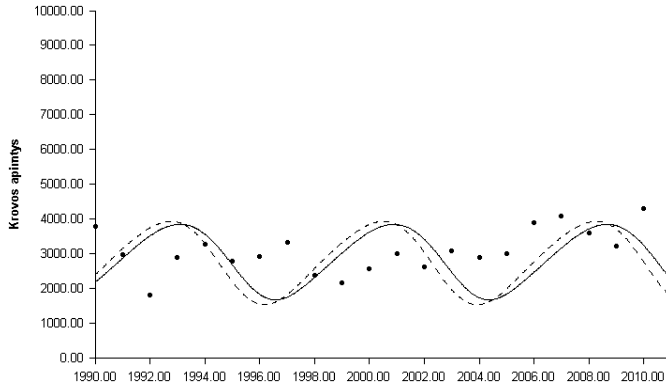
Pav. 3 ir pav. 4 palyginti modelių (1) ir (6) tikslūs skaitiniai sprendiniai ir periodiniai sprendiniai, gauti pagal artutines asimptotines formules (2) ir (7) matome, kad modelio (1) periodiniai sprendiniai labiau „harmoniški“ [3] už modelio (6) periodinius sprendinius.

## 3 Išvados

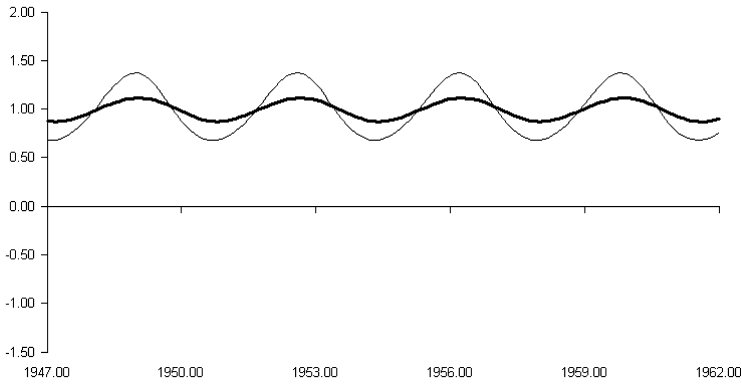
Parodyta, kad modeliai su vėlavimu, kuris atspindi produkcijos gamybos laiką, gali pakankamai gerai paaikinti gerai žinomą verslo ciklų buvimą ekonomikoje.



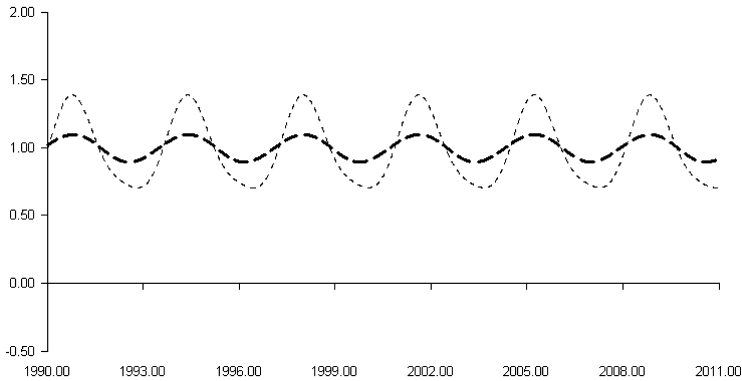
**1 pav.** Tikslus lygties (1) sprendinys  $\frac{P(t)-P_*}{P_*}$ , kai  $r = 1,775$ ,  $h = 0.9$  pavaizduotas ištisine linija, o artutinis, apskaičiuotas pagal formulę (2), punktyrine linija.



**2 pav.** Tikslus (1) sprendinys  $P(t)$  pavaizduotas ištisine linija, o artutinis sprendinys (2) – punktyrine, kai  $P_* = 3000$ ,  $r = 0.95$ ,  $h = 1.9$ .



**3 pav.** Tikslus lygties (1) periodinis sprendinys,  $P_* = 1$ ,  $r = 1,775$ ,  $h = 0.9$  pavaizduotas stora linija, o lygties (6) – plona linija.



**4 pav.** Artutinis periodinis lygties (1) sprendinys, gautas pagal formulę (2), pavaizduotas stora punktyrine linija, o lygties (6), apskaičiuota pagal formulę (7) plona punktyrine linija, kai  $P_* = 1$ ,  $r = 2.0$ ,  $h = 0.8$ .

## Literatūra

- [1] A.B. Larson. The hog cycle as harmonic motion. *J. Farm Econ.*, **46**(8):375–386, 1964.
- [2] D. Švitra. Chatčinsono lygties tyrimas. *Dif. lygt. ir jų taik.*, **20**:25–32, 1978. Vilnius (rusų k.).
- [3] D. Švitra. *Fiziologinių sistemų dinamika*. Mokslas, Vilnius, 1989 (rusų k.).
- [4] D. Švitra. Vėlavimas ir ekonominių sistemų dinamika. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **53**, 2012.

### SUMMARY

#### **Economic growth model with delay**

*R. Barzdžiukas, R. Eitkevičiūtė, O. Švitra*

In this article the authors analyzed nonlinear model with delay of production growth. In the nonlinear analysis were obtained the results are compared with real date.

*Keywords:* mathematical modeling of the production process, differential equations, stable periodic solution.