LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI ISSN 0132-2818
52 tomas, 2011, 59–61 www.mii.lt/LMR/

Kramerio formulių taikymo klausimu

Antanas Apynis

Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: antanas.apynis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame straipsnyje siūloma tam tikra Kramerio[1] formulių [1, 2] modifikacija tiesinių lygčių sistemai spręsti. Taikant ją sumažėja skaičiavimų apimtis.

Raktiniai žodžiai: tiesinių lygčių sistema, matrica, determinantas, tiesinis darinys, Kramerio formulė, sprendinys.

Tiesinių lygčių (su realiaisiais koeficientais) sistema $Ax = b$, kurios matrica yra n-tos eilės kvadratinė matrica, turi vienintelį sprendinį, tada ir tik tada, kai $\det A \neq 0$. Šio sprendinio komponentes x_j, $j = 1, 2, \dots, n$, galima užrašyti tokiomis formulėmis:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

čia A_j yra matrica, gauta iš A, jos j-ąjį stulpelį pakeitus vektoriumi b.

Tos formulės vadinamos Kramerio vardu, nors pora metų anksčiau jas paskelbė Maklorenas.[2]

Aptarkime vieną galimybę supaprastinti Kramerio formules.

Tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemą, sudarytą iš n lygčių, $Ax = b$ užrašykime taip:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Keičiant sistemos lygtis atitinkamais jų tiesiniais dariniais galima gauti ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

kurioje $c_{ij} = 0$, kai $1 \leqslant j < i$.

Kai $\det A \neq 0$, tai (3) sistemos koeficientai c_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$, nelygūs nuliui, todėl

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}} = \frac{\det A_n}{\det A}. \tag{4}$$

[1] Gabriel Cramer (1704–1752) – šveicarų matematikas.
[2] Colin Maclaurin (1698–1746) – škotų matematikas.

Aišku, kad (3) sistema yra ekvivalenti ir tokiai tiesinių lygčių sistemai:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ c_{nn}x_n = d_n. \end{cases}$$

Įrašius į ją x_n reikšmę (4), toliau galima nagrinėti viena lygtimi mažesnę tiesinių lygčių su $n-1$ nežinomųjų sistemą

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j = b_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

kurioje $b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{in}\det A_n}{\det A}$. Šios sistemos matricą pažymėkime $A^{(1)}$, o laisvųjų narių vektorių – $b^{(1)}$. Kadangi $\det A \neq 0$, tai $\det A^{(1)} \neq 0$. Vadinasi,

$$x_{n-1} = \frac{\det A_{n-1}^{(1)}}{\det A^{(1)}}.$$

Tęsdami analogišką analizę, gautume tokias (3) tiesinių lygčių sistemos sprendinio komponenčių formules:

$$x_j = \frac{\det A_j^{(n-j)}}{\det A^{(n-j)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

čia $A^{(0)} = A$, $A_n^{(0)} = A_n$, $A^{(n-j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, yra tiesinių lygčių

$$\sum_{k=1}^{j} a_{ik}x_k = b_i^{(n-j)}, \qquad b_i^{(n-j)} = b_i^{(n-j-1)} - \frac{a_{in-j-1} \cdot \det A_j^{(n-j-1)}}{\det A^{(n-j-1)}},$$

$i = 1, 2, \ldots, j$, sistemos matrica, o $A_j^{(n-j)}$ yra matrica, gauta iš $A^{(n-j)}$, pakeitus jos j-tąjį stulpelį vektoriumi $b^{(n-j)} = (b_1^{(n-j)}; b_2^{(n-j)}; \ldots; b_j^{(n-j)})^T$.

1 pavyzdys. Taikydami (5) formules, išspręskime tokią tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 7x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$$

Iš pradžių apskaičiuokime matricų

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 0 & 3 \\ 3 & -8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

determinantus. Gausime

$$\det A = 5 \quad \text{ir} \quad \det A_4 = 10,$$

todėl $x_4 = 2$.

Toliau sprendžiame trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ -2x_1 + 7x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 5x_2 = -4 \end{cases}$$

ir pagal Kramerio formulę apskaičiuojame nežinomojo x_3 reikšmę:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 7 & 5 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{1} = 0.$$

O tada

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{ir} \quad x_1 = 1.$$

Gavome sprendinį $(1; 1; 0; 2)$.

Literatūra

[1] K. Bulota ir P. Survila. *Algebra ir skaičių teorija.* T. I. Mokslas, Vilnius, 1989.

[2] A. Matuliauskas. *Algebra.* Mokslas, Vilnius, 1985.

SUMMARY

On application of Cramer's rule

A. Apynis

The article analyses a possibility of modification of Cramer's rule. The modified formulas for the solution of a system of linear equations, with application of which the volume of calculation reduces, are suggested.

Keywords: system of linear equations, matrix, determinant, linear combination of equations, Cramer's rule, solution.