Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
59 t., 2018, 20–26

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Nei per lengvi, nei per sunkūs pamokomi uždaviniai Lietuvos matematizuotose terpėse

Romualdas Kašuba

Vilniaus universitetas
Naugarduko g. 4, LT-03225 Vilnius
E. paštas: romualdas.kasuba@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame straipsnyje nagrinėjami ir aptariami kai kurie uždaviniai, kurie gali būti išspręsti ir beveik nieko neparašius – tik atsakymą užrašant, nors gali sukelti ir vadinamųjų laikinų sunkumų ir netgi pasirodyti sunkoki.

Raktiniai žodžiai: uždavinių formuluočių metaforiškumas, jų skaitinis patrauklumas, natūralių sąlygų emocinis paveikumas, psichologiniai sprendimo etapai, euristinės strategijos bei sąlygos perskaitymo lygmenys.

Įvadas

Banaliais žodžiais yra virtę sakiniai, kad viskas yra įmanoma, reikia tik panorėti. Tokie žodžiai yra labai geri vadinamajam pradiniam entuziazmui sukelti, bet kurio ne tik neįsivaizduojama jokios veiklos pradžia bei joks pasiryžimas ko nors imtis – o be šito, suprantama, nebūna ir jokių, netgi dalinių laimėjimų.

Žodžiu, pačioje pradžioje žodžiai „Misija įmanoma“ būtų tikrai rekomenduotini, nes tie žodžiai – nežiūrint jų kategoriškumo – yra „labiau teisingi negu atvirkščiai“.

Jie yra tarsi įvadas į žinomą posakį „Gera pradžia – pusė darbo“, arba į kitą – irgi labai žinomą kinų išminties krislą „Kelią įveikia einantysis“, ar net į tokį mūsišką kasdienį pasakymą, parsidedantį žodžiais „Nesigailėsi anksti kėlęs. . .“ Mūsų svarstomuoju atveju tai būtų maždaug tas pats, kaip tvirtinti; „Užuot kaimyną peikęs, geriau būtum ką nors doro veikęs“.

Žodžiu, darbas visada yra realizacinis nuotykis, suteikiantis darančiajam tikros patirties, psichologinės tvirtybės ir euristinės išminties.

Ypač tuo pasižymi vadinamieji aritmetiniai, kombinatoriniai, euristiniai ir kitokie „labai žemiški“ uždaviniai.

Tik nelabai populiaru yra sakyti, kad ne visada ir ne visur (ir ne visiems) viskas iš karto pavyksta, viskas yra gana lengva, arba pusiau lengva. Ryžtumės atvirai pasakyti, kad kai kas man gali būti labai sunku ir iš to, kas kitam yra tikrai lengva.

Klasikinė uždavinių siūlymo patrauklybė arba pirmiausiai buvo rebusai

Rebusai nėra labai sunkus mokslas, o ypač šiais laikais, kai kompiuterių plėtra yra tokia spėri, kad kelia ir beveik neribotą pasigėrėjimą kartu su tam tikrais būgštavimais, susijusiais su tuo, kas bus, jeigu ir toliau viskas taip greitėjančiai klostysis.

Dabartinis klasikinis rebusas „per kompiuterius“ yra labai prieinamas ir kyla tik estetinis klausimas, ar jis vis dar taip pat būtų prieinamas ar įveikiamas ir išjungus kompiuterį.

Visi gerai žino, kad rebusas, yra, kaip taisyklė, raidėmis užrašytas ir neretai kalbinio žavesio turintis aritmetinis veiksmas, kurį mes turime iššifruoti, arba sužinoti, kaip ten viskas atrodė anksčiau, kol skaičiai dar nebuvo pakeisti raidėmis. Visuotiniu susitarimu, kuris trumpose sąlygose net nėra primenamas, vienodos skaitmenys yra keičiamos vienodomis, o skirtingos skaitmenys yra keičiamos skirtingomis raidėmis – ir užkoduojant ir atkoduojant.

Štai vienas iš tokių ir lengvų, ir vis dėl to jau gana įdomių rebusų, kurį pastaraisiais metais autoriui ne sykį teko lukštenti su besidominčiais aritmetiniais galvosūkiais.

Jeigu tiesa yra tokia, kad

$$\frac{9}{JIE} = \frac{6}{TAU} = \frac{13}{GROS},$$

tai kokio didumo yra tas *GROS*?

Suprantama, kad su kompiuteriu tas rebusas niekam nebaisus, o štai jį išspręsti keliomis eilutėmis jau yra tam tikras menas.

Ir vis dėl to kiekvienas nekompiuterinis sprendimas, matyt, neišvengiamai prasidėtų nuo paprastučių pastabų apie tai, kad kaip jau ten „bus grojama, taip jau ir bus“, bet raidės tame rebuse nesikartoja, jos yra visos skirtingos ir jų iš viso gal atsitiktinai, o gal ir ne yra lygiai 10.

Arklio Dominyko aritmetinis entuziazmas

Šis uždavinys prieš keletą metų buvo pasiūlytas Vilniaus universiteto organizuojamame 5–8 klasių moksleivių konkurse, vykstančiame kartu su komandine Lietuvos mokinių olimpiada profesoriaus Jono Kubiliaus įsteigtai taurei laimėti, prasidėjusia 1986 metais. Nors konkursas, kaip sakyta, vyksta prie komandinės olimpiados, kurioje komandos dalyvauja pagal pakvietimą, individualiosios moksleivių varžytuvės yra prieinamos visiems – tereikia tiktai registruotis, atvykti ir spręsti uždavinius. Tais 2011 metais olimpiados dalyviams buvo pasiūlyta proginė Arklio Dominyko ir jo draugų „proginė“ arba lengvai „suliteratūrinta“ ar „beletrizuota“ uždavinių serija. Žemiau pateikiame vieną iš tos serijos uždavinių – dar vieną nei per sunkų, nei per lengvą proto gimnastikos arba kombinatorinio sumanumo pratimą. Manytume, kad tai yra tikrai nei sunkus, nei lengvas bet vis dėlto, drįstume manyti, per akimirksnį ar per 3 sekundes mintyse nepadaromas uždavinys. O jeigu Jums padaromą, tai tada prašytume priimti mūsų sveikinimus. Pateikiame pilną „beletrizuotą“ to uždavinio formuluotę, kaip ji buvo pateikta tų atmintinų 2011 metų varžytuvių dalyviams.

Asiliukas Dainius ir arklys Dominykas

Asiliukas Dainius buvo senas, ištikimas ir labai atsidavęs arklio Dominyko draugas ir visada nešdavo Dominykui kažkokių nematytų uždavinių, kurių iš pradžių Dominykas visai nesiverždavo spręsti. Bet ėmęs spręsti Dominykas labai pykdavo, jeigu jam nepasisekdavo jų nors kiek pabaigti.

Šiandien atėjęs asiliukas Dainius išsitraukė iš kišenės 16 sulipusių raidžių ir skaičių porų

$$a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3 \text{ ir } d4$$

ir ėmė raginti Dominyką surašyti tas sulipusias poras po vieną į kiekvieną 4×4 lentelės langelį taip, kad ir kiekvienoje lentelės eilutėje, ir kiekviename tos lentelės stulpelyje po vieną kartą pasitaikytų ir visos 4 raidės

$$a, b, c \text{ ir } d$$

ir visi keturi skaičiai

$$1, 2, 3 \text{ ir } 4.$$

Dominykas nelabai tiki, kad tai gali pavykti, o asiliukas Dainius sako, kad tai turėtų pavykti jau vien dėlto, kad ta toji lentelė labai gražiai atrodytų – tik pagalvokite: jokioje eilutėje ir jokiame stulpelyje jokios raidės ir jokie skaičiai nesikartoja.

Kuo baigsis šitie įrašinėjimai?

Sprendimas. Paliekame galimam skaitytojui galimybę pačiam pamėginti padėti protingajam ir kantriajam Asiliukui Dainiui bei Arkliui Dominykui. Tiktai jei rašinėsime be sistemos, arba visai „be simetrijos“, tai reikalai gali užsitęsti.

Lentelių pildymas

Lentelių pildymo uždaviniai paprastai nėra labai gąsdinantys, nes vadinamajame informacijos amžiuje mūsų akis yra „įpratinta“ prie lentelės pateikiamos skaitinės informacijos. Štai keletas uždavinių, kurie buvo pateikti paskutiniųjų metų konkursuose. Ne vienas iš jų yra paimtas iš kaimynų baltarusių konkursų. Filosofiniu požiūriu, jeigu mes keliame lentelei tam tikrus reikalavimus, tai, aišku, kad tokia lentelė gali būti įmanoma, arba neįmanoma. Suprantama, jog jeigu klausiama, ar galima užpildyti lentelę su tam tikrais reikalavimais, tai jeigu tai pavyksta, tai mums pakanka kokio nors vieno pavyzdžio. O jeigu paaiškėja, jog taip, kaip mes norėtume, lentelės užpildyti neįmanoma, tai tuomet mums derėtų suprantamai tai paaiškinti.

Viena visai konkreti 5×10 matmenų lentelė

Klausiame, ar galima būtų į 5×10 matmenų lentelės langelius, įrašant po vieną skaičių į kiekvieną langelį surašyti visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 50 tokiu būdu, kad visos tos 5 eilučių ir 10 stulpelių sumos duotų 15 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių (nesvarbu, kokia eile).

Uždavinio sprendimas neatrodo (ir nėra sunkus). Suprantama, kad pirmiausiai mums derėtų susiskaičiuoti, kam yra lygi visų skaičių nuo 1 iki 50 suma. Mes iš karto suvokiame, kad imant nuosekliai sumuoti kraštinius skaičius, mes kiekvieną kartą turėsime po 51: pirmiausiai kaip $1 + 50$, toliau kaip $2 + 49$ ir taip toliau per visus 25 kartus. Todėl visų skaičių nuo 1 iki 50 suma yra tiek pat, kiek būtų 25 kartus sudėjus po 51, arba, visai trumpai – $25 \cdot 51$, o tai yra 1275.

Kadangi kiekvienas skaičius „traukiamas“ sumon kaip ir eilutės, ir kaip stulpelio atstovas, tai toji visų eilučių ir visų stulpelių „sumų suma“ yra du kartus, negu čia ką tik kad suskaičiavome ir todėl yra lygi $1275 \cdot 2 = 2550$.

Jeigu tie 2250 yra 15-os iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma, tai tada vidurinis, arba 8-tasis tos eilutės skaičius būtų lygus $2550 : 15 = 170$, vadinasi, visi tie 15 skaičių, jeigu juos išvardintume, būtų skaičiai

$$163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177.$$

Ir dabar jau yra visai aišku, kad. jeigu šio uždavinio misija yra įmanoma, tai tada kažkokių penkių tos eilutės skaičių suma yra lygi likusių skaičių sumai, o tai yra neįmanoma, nes tada kažkokių penkių skaičių suma turėtų būtų didesnė už tūkstantį, o yra neįmanoma.

Antra dar konkretesnė, nes dar mažesnė 34 lentelė

Yra klausiama, ar galima būtų į kiekvieną 3×4 lentelės langelį, po vieną skaičių į kiekvieną langelį įrašyti skirtingus natūraliuosius skaičius taip, kad ir visų tos lentelės eilučių skaičių sumos būtų lygios tarpusavyje, ir visų tos lentelės stulpelių skaičių sumos taip pat būtų lygios tarpusavyje.

Antrasis papildantysis klausimas būtų toksai; jeigu misija įmanoma, tai kam yra lygi pati mažiausioji visų tokios eilutės skaičių suma?

Dvi skirtingo pildymo sunkumo, bet labai vienodų matmenų lentelės

Į kiekvieną iš 49 lentelės 7×7 langelių įrašyta po vieną (nebūtinai sveiką) skaičių taip, kad visų eilučių ir visų stulpelių skaičių sumos yra lygios tarpusavyje. Be to, paaiškėjo, kad bet kuriame iš 4 kampinių tos lentelės 2×2 kvadratų visų jo skaičių suma yra lygi 10, o visų centrinio 3×3 kvadrato skaičių suma yra lygi 25.

Kokia gali būti visų tos lentelės skaičių suma (Atsakymą paaiškinkite).

Kitas uždavinys su 7×7 lentele buvo pasiūlytas Lietuvos olimpiadoje 2017 metais (3 uždavinys, siūlytas 9 bei 10 klasėms). Pateikiame jo sąlygą:

Į lentelės 7×7 langelius surašyti realieji skaičiai taip, kad kiekvieno 3×3 kvadrato visų 9 skaičių sandauga ir kiekvieno 4×4 kvadrato visų 16 skaičių sandauga yra lygi tam pačiam skaičiui S. Ar gali (su bent viena S reikšme) visų keturiasdešimt devynių tos lentelės skaičių sandauga būti lygi 2017?

Atvirai pasakysime, kad per uždavinių atranką tas uždavinys buvo ir pasiūlytas, ir „paimtas“ kaip lengvas arba „demokratiškas“ uždavinys. Tikrovė gi pasirodė savotiškai labai susišaukianti su antruoju mūsų straipsnelio pavadinimo būdvardžiu – žiuri komisija terado vos kelis pilnus šito lengvu laikyto uždavinio sprendimus.

Nei sunkių, nei lengvų uždavinių rinkinio pavyzdžiu, tinkančiu mūsų nagrinėjamų uždavinių profiliui, galėtų būti laikytini ir didžioji dalis Marijampolės Sūduvos krašto gimnazijų 2016 metų konkurso uždavinių. 3 iš 5 ten buvusių uždavinių su sprendimo užuominomis pateikiame galimų skaitytojų vertinimui.

1. Senelis Petras norėjo nuvažiuoti į Alvitą ir nupirkti septynių skirtingų natūraliųjų skaičių rinkinį, kuris įtiktų trims jo anūkams Jonui, Baltrui ir Matui (Matijošiui). Anūkui Jonui reikia, kad skaičių septyniukėje būtų lygiai 5 skaičiai, kurie dalijasi iš 3, Baltrui – kad septyniukėje būtų lygiai 5 skaičiai, kurie dalijasi iš 5, o Matui (Matijošiui) reikia, kad septyniukėje būtų lygiai 5 skaičiai, kurie dalijasi iš 7. Senelis Petras, pats nemenkas ekstremalas, norėjo nupirkti tokį 7 skaičių rinkinį, kuris negana to, kad įtiktų visų 3 anūkų norams, bet dar būtų toks, kurio didžiausias skaičius būtų mažiausias įmanomas. Senelis Petras Alvite galų gale surado tokį rinkinį. Koks yra didžiausias nupirktojo rinkinio skaičius?

Tas pats mažiausias iš tų didžiausių galimų tokios skirtingų natūraliųjų skaičių septyniukės skaičių, įtikinančių visų trijų anūkų norams, yra 105.

$$15, 35, 63, 70, 75, 84, 105.$$

2. Mano kaimynas iš Vilkaviškio Martynas grįžo iš Marijampolėje vykusio pasaulio sūduvių suvažiavimo ir ėmė girtis gyvenęs viešbučio „liukse“, kurio numeris buvo triženklis ir gaunamas sudauginus tokius tris skaičius: pirmą vienetu didesnį negu kambario numerio šimtų skaitmuo, antrą vienetu didesnį, negu numerio dešimčių skaitmuo, o trečiąjį tiesiog tokį patį kaip kambario numerio vienetų skaitmuo. Išgirdusi tai, močiutė Teklė iš Alvito pasakė, kad tame pasakojime „nesueina aritmetika“. Ar teisi yra močiutė Teklė?

Sprendimo nuosprendis sutampa su Alvito močiutės nuomone.

Užrašius sąlygą, t.y. tą triženklį skaičių su skaitmenimis ABC kaip $100A+10B+C$ ir sulyginus, kad jis būtų lygus $(A+1)\cdot(B+1)\cdot C$ gauname lygybę

$$100A + 10B + C = (A + 1) \cdot (B + 1) \cdot C.$$

Po suprastinimų pakaktų įsitikinti, kad $100 > (B + 1) \cdot C$ ir $10B \geqslant B \cdot C$.

Abu šie faktai yra tikri, nes B ir C yra skaitmenys.

3. Marijampolės Marijonų gimnazijos moksleivis Marius Marijampolskis turi keturis skirtingus natūraliuosius skaičius. Žinoma, kad trys iš šešių galimų sumų po du skaičius yra 21, 31 ir 41. Kokia yra pati mažiausia galima visų Mariaus Marijampolskio keturių skirtingų natūraliųjų skaičių suma?

Pateikiame nesunkų bet kažkuo pamokomą to uždavinio sprendimo komentarą.

Pirmiausiai pastebėsime, kad šioje trijose mums pasakytose sumose „dalyvauja“ visi minėtieji keturi skaičiai A, B, C ir D. Jeigu būtų ne taip, tai tada gautume, kad dviguba kažkurių trijų skaičių sakykime A, B ir C, suma turėtų būti lygi $21 + 31 + 41?93$, o tai neįmanoma.

Kai trijose sumose dalyvauja visi keturi rinkinio skaičiai, skirsime du atvejus:

a) Yra dvi tokios sumos, kurios dalyvauja visi keturi Mariaus Marijampolskio rinkinio skaičiai. Iš tokių sumų pačią mažiausią galimą visų keturių skaičių sumą $21 + 31 = 52$, duotų, pavyzdžiui, rinkinys $(1; 10; 20; 21)$;

b) Tokių dviejų sumų, apimančių visus keturis Mariaus Marijampolskio rinkinio skaičius, nėra. Tada, kadangi visose trijose sumose jau turi dalyvauti visi keturi Mariaus Marijampolskio rinkinio skaičiai, tai tada suma yra nemažesnė kaip $21 + 11 + 21 = 53$, o tai jau būtų daugiau negu kad mes jau esame gavę. Todėl lieka atsakymas 52.

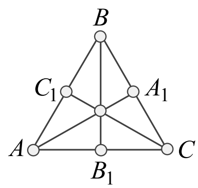
Lentelės būna ir natūraliai trikampės

Keli dabar pateikiami uždaviniai, paimti iš neišsenkančių plačiai žinomo konkurso „Kengūra“ paskutiniųjų metų aruodų taip pat buvo naudojami darbe su mokiniais ir studentais. Kad tai „kengūrinės“ kilmės uždaviniai, rodo ir „išlikę“ 5 pasirenkamieji atsakymai.

Uždavinių sąlygas dirbdamas su mokiniais ir studentais autorius, lygiai taip pat, kaip ir matematiniuose konkursuose, paprastai visada stengiasi „suasmeninti“ arba beletrizuoti, nes gausi praktika įtikino, jog tai vis dėlto, nors „skaitymo“ ir prideda, bet spręsti labiau padeda, nei trukdo. Arklys Dominykas, pamėgęs trikampius ėmėsi įrašinėti į septynis trikampės diagramos apskritimus po natūralųjį skaičių tokiu būdu, kad visų atkarpoms

$$AB, BC, CA, AA_1, BB_1, CC_1$$

priklausančių trijų apskritimų skaičių sumos yra skirtingos.



Palaipsniui ji panoro išsiaiškinti, kiek mažiausiai skirtingų natūrinių skaičių jai reikėtų panaudoti taip įrašinėjant.

Po tam tikro triūso Arklys Dominykas ir Asiliukas Dainius nustatė, kad tuo kilniu reikalu, užtikrinant visų tų 6 sumų skirtingumą į langelius mažų mažiausiai teks įrašyti: (A) 6 Skirtingus skaičius, (B) 5 skirtingus skaičius, (C) 4 skirtingus skaičius, (D) 3 skirtingus skaičius, (E) 2 skirtingus skaičius.

Vienas nuotykis su šifrais

Kielė Kamilė gavo užduotį įlįsti į nusikaltėlių seifą. Ekspertai mano, kad tai atlikti pajėgtų tiktai jis, mūsų Kamilė ir daugiau niekas kitas. Po diskrečių, bet efektyvių tyrimų Kamilė nustatė, kad nusikaltėlių seifo kodas yra 5-ženklis skaičius, kuris:

1) yra sudarytas iš 5 skaitmenų, kurie gali keistis nuo 0 iki 9;

2) jeigu tą susidariusią kombinaciją laikytume 5-ženkliu skaičiumi, tai tas skaičius būtų lyginis;

3) toje 5 skaitmenų kombinacijoje tėra tik vienas vienintelis nelyginis skaitmuo;

4) Toje 5 skaitmenų kombinacijoje yra lygiai 4 skirtingi skaitmenys ir tie pasikartojantys vienodi skaitmenys nestovi greta;

Tai kiek gi skirtingų kombinacijų privalo išmėginti sumanioji Kielė Kamilė, kad nusikaltėlių seifas būtų sėkmingai atidarytas?

(A) 3150 (B) 4500 (C) 5400 (D) 7200 (E) teisingas atsakymas yra kitas skaičius.

Šis uždavinys yra paimtas iš masinio Italijos mokinių konkurso.

Greitai suskaičiuoti ne visada labai paprasta

Ainoras nori parinkti savo seifui 5 skaitmenų kombinaciją tokiu būdu, kad ta kombinacija būtų 5-ženklis skaičius, kuris dalinasi iš 3 ir iš kurio pirmųjų keturių iš kairės esančių skaitmenų du skaitmenys būtų lyginiai ir du nelyginiai.

Tokių 5-ženklių skaitmenų kombinacijų iš viso yra:
(A) $2^5 \cdot 5^2$; (B) $2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^2$; (C) $2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^2$; (D) $5^2 \cdot 3^4$; (E) $2^{10} \cdot 5 \cdot 3$.

Literatūra

[1] *Italian Mathematical Contests 2005–2006*. Unione Matematica Italiana, Scuola Normale Superiore Pisa, 2006, 14 pp.

[2] R. Kašuba. From the lifetime xperience of a seasoned math educator – thoughts, hopes, views and impressions. In *Competitions for Young Matematicians*, *Perspective from Five Continents*, ICME 13, Springer, 2017, ISBN 978-3-319-56584-2, pp. 271–302.

[3] *Zadachi minskoj gorodskoj matematicheskoj olimpiady mladshikh shkolnikov 2005–2012*, Belorusskaya associacia „Konkurs“, Minskas, 2012, ISBN 987-985-557-138-5, 302 pp.

[4] *Zadachi belorusskikh matematicheskikh olimpiad, gody 2012–2013 i 2013–2014*. Belorusskaya associacia „Konkurs“, Minskas, 2014, ISBN, 978-985-557-075-3, 368 pp.

SUMMARY

Instructive problems of medium difficulty in math enviroments of Lithuania
R. Košuba

In the paper an attempt to represent some not too easy and in the same time not difficult, accessible, useful and challenging problems used in Lithuanian math events, as well as in training high-scool and University students, is undertaken.

Keywords: Metaphoricalness of problem formulations, their digital attractiveness, emotional suggestiveness of natural conditions, psychological steps of solution, heuristic strategies and levels of comprehending.