ИНФОРМАЦИЯ

об Одиннадцатой конференции Литовского математического общества

22–23 июня 1970 года в Вильнюсском Государственном университете проходила 11-ая конференция Литовского математического общества со следующей программой:

1. Открытие конференции.
2. Г. Ясюнас, И. Тейшерскис. О работе по популяризации математики в средней школе.
3. В. Матулис, А. Бикялис. О прикладной математике.
4. Доклады на секциях.
5. Дискуссии.
6. Закрытие конференции.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Секция теории функций и дифференциальных уравнений

1. П. Голоквосчюс (ВГУ). **Условия существования периодического решения уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами**

Настоящая заметка является продолжением работы [1].

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\left[\frac{\dot\varphi_1(t)}{\varphi_1(t)}+\alpha\varphi_1(t)\varepsilon\beta\varphi_2(t)\right]\frac{dx}{dt}-\varepsilon\nu\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,x=0,$$

где непрерывные и ограниченные периодические с периодом $\omega=1$ функции $\varphi_k(t)$ $(k=1, 2)$ обладают свойствами

$$\int_0^1\varphi_k(t)\,dt=0\quad(k=1,\ 2),\qquad \varphi_1(t)\neq0\quad\text{при}\quad t\in[0,1].$$

Постоянные величины $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ и $\nu\neq0$ предполагаются комплексными, а ε — численный параметр.

Найдены необходимые и достаточные условия существования периодического с периодом $\omega=1$ решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$x(0,\varepsilon)=0,\ \dot x(0,\varepsilon)=1.$$

Литература

1. Л. Б. Голоквосчюс, Об интегральной матрице одной системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 5, № 4, (1969) 626–640.

2. Л. Б. Софман (МГУ). **О чебышевских множествах**

Пусть B—банахово пространство, $M \subset B$. Множество M называется чебышевским множеством, если $\forall x \in B$. $\exists$ единственный элемент $y \in M$ такой, что $\| x-y \| = \inf_{z \in M} \| x-z \|$. Доказываются следующие утверждения.

I) Если M — чебышевское множество, то оно замкнуто и линейно связано, т.е. $\forall a, b \in M$, $\exists$ — кривая $\gamma \subset M$, которая соединяет a_n и b.

II) Пусть $B = X^n$, т.е. R^n с метрикой, порожденной произвольным замкнутым ограниченным выпуклым центрально симметричным телом S, содержащим внутреннюю точку. S является единичным шаром в X^n, а ∂S — единичной сферой.

Определение. Направление l называется сильно касательным относительно ∂S, если $\exists$ отрезок $I \subset \partial S$, параллельный l, или если l параллельно гиперплоскости π, касательной к ∂S.

Доказывается, что для того чтобы M было чебышевским множеством, достаточно выполнения следующих трех условий:

1) M — линейно связное множество,

2) M — выпукло по всем сильно касательным направлениям сферы ∂S,

3) $\bar{\exists}$ отрезка $I \subset \partial S$ такого, что $\exists$ — отрезок $I' \subset M \setminus \operatorname{int} M$ и $I \parallel I'$.

Для $n=2$ эти условия необходимы.

3. В. Кабайла (ВГУ). **Формулы Коши и Пуассона с двойными интегралами**

4. В. Меркис (ВГУ). **О приводимости одной системы n линейных дифференциальных уравнений**

Рассматривается система вида

$$\frac{dx}{dt} = x\Big(P_0 + \varepsilon P(t)\Big), \tag{1}$$

где $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — вектор строка, $P_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица с постоянными элементами, удовлетворяющими условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i - \operatorname{Re} \lambda_k \neq 0 \ (i \neq k), \tag{2}$$

$P(t) = \big(p_{ik}(t)\big)$ — непрерывная и ограниченная матрица n—20 порядка и ε — комплексный параметр.

Доказывается следующее предложение.

Теорема. *Пусть в системе* (1) *элементы матриц* P_0 *и* $P(t)$ *удовлетворяют соответственно условиям* (2) *и*

$$\int_0^t p_{kk}\, dt = a_k t + F_k(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\int_0^t |p_{ik}|\, dt = F_{ik}(t) \quad (i > k; \ i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

где a_k *— постоянные, а* $F_k(t)$ *и* $F_{ik}(t)$ *— ограниченные функции. Тогда система* (1) *приводима в некотором круге* $|\varepsilon| < r$. *В частности, она приводима, если*

$$|\varepsilon| \leqslant \frac{R}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-2} h (\sqrt{S} + \sqrt{s})^2} \quad (n \geqslant 3),$$

где

$$h=\frac{1}{\min\limits_{\substack{1\leqslant i,\,k\leqslant n\\ i\neq k}}|\operatorname{Re}\lambda_i-\operatorname{Re}\lambda_k|},\quad s=\max_{1\leqslant i,\,k\leqslant n}\sup_t|p_{ik}|,\quad S=\|P(t)\|,$$

причем норма определяется следующим образом:

$$\|P(t)\|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\sup_t|p_{ik}|.$$

5. А. Мишкялявичюс (ВГУ). **Теоремы Островского и Полиа для интегралов типа Лапласа—Стилтьеса**

Рассматривается интеграл

$$f(z)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda(t)z}\,dA(t),\tag{1}$$

где комплекснозначная функция $A(t)$ на каждом отрезке из $[0,\infty)$ имеет ограниченную вариацию, а $\lambda(t)$ — кусочно-дифференцируемая функция, причем

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=\infty;\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}|\arg\lambda'(t)|=\alpha<\frac{\pi}{2}\cdot\tag{2}$$

Известно, что интеграл (1) сходится в области $G=\{z=x+iy:x>c(y)\}$ и расходится в области $D=\{z=x+iy:x<c(y)\}$, $|y|<\infty$, где уравнение границы $x=c(y)$ установлено раньше.

1. Доказаны теоремы Островского для интеграла (1) в случае, когда выполнено условие (2).

Теорема 1. *Пусть*: 1) $A(t)=\text{const}$ *на последовательности отрезков* $p_n\leqslant t\leqslant q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\infty$; 2) $|\lambda(q_n)|>(1+\Theta_n)|\lambda(p_n)|$, $\lim\limits_{n\to\infty}\Theta_n=\infty$. *Тогда последовательность интегралов*

$$\left\{\int_0^{p_n}e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right\}$$

сходится равномерно к $f(z)$ во всякой конечной области, внутренней к естественной области существования этой функции. Кроме того, эта область является односвязной.

Теорема 2. *Пусть*: 1) $f(z)$ — *голоморфна в точке* ζ, *которая принадлежит границе области сходимости интеграла* (1); 2) *существует круг, целиком лежащий в области сходимости этого интеграла и касающийся границы области сходимости в точке* ζ; 3) $\max(|\beta|,|\gamma|)<\frac{\pi}{2}-\alpha$, *где* $\gamma=\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\arg\lambda(t)$, $\beta=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\arg\lambda(t)$; 4) $A(t)=\text{const}$ *на последовательности отрезков* $p_n\leqslant t\leqslant q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\infty$; 5) $|\lambda(q_n)|>(1+\Theta)|\lambda(p_n)|$, $\Theta>0$. *Тогда последовательность интегралов*

$$\left\{\int_0^{p_n}e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right\}$$

стремится к $f(z)$ равномерно в некоторой окрестности точки ζ.

2. Теорема Крамера—Полиа. *Пусть*: 1) $\varphi(z)$ — *целая функция первого порядка и типа* σ; 2) J — *сопряженная диаграмма функции* $\varphi(z)$; 3) S — *множество особых точек функции* $f(z)$, *которая предполагается однозначной, и* 4) E — *дополнение множества точек вида* $z=s+j$, *где* s *и* j *пробегают соответственно множества* S *и* J.

Тогда интеграл

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-\lambda(t)z}\varphi[\lambda(t)]\,dA(t)$$

сходится в области $H=\{z=x+iy : x>c(y)+\sigma\}$, *а функция* $F(z)$ *является однозначной и голоморфной в связной части множества* E, *которой принадлежит область* H.

Литература

1. **Bernstein**, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.

6. Э. Г. Кирьяцкий (ВИСИ). **Об одном инвариантном семействе аналитических в единичном круге функций.**

Введем класс A аналитических в единичном круге функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$, и для любого действительного $-1<t<1$ определим в этом классе оператор $\mathbf{L}_t$ следующим образом:

$$\mathbf{L}_t f=\frac{f\left(\frac{z+t}{1+tz}\right)-f(t)}{(1-t^2)f'(t)}=\Phi(z,t).$$

Пусть k — произвольное натуральное число, a — комплексное число и $I_k(a)$ — семейство функций из A, определенное следующим образом: $f(z)\in I_k(a)$, если для любого $-1<t<1$ имеет место равенство

$$\frac{1}{k!}\left.\frac{\partial^k \mathbf{L}_t f(z)}{\partial z^k}\right|_{z=0}=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)=a.$$

Таким образом, $I_k(a)$ представляет собой семейство функций из A с инвариантным относительно преобразования $\mathbf{L}_t$ k-ым коэффициентом тэйлоровского разложения.

Теорема 1. *В классе A лишь функции*

$$f_\alpha(z)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha-1\right],$$

где α произвольное комплексное число, удовлетворяют при любом $-1<t<1$ уравнению $\mathbf{L}_t f=f$.

Теорема 2. *Пусть уравнение*

$$P_k(\alpha)=\frac{1}{k!}f_\alpha^{(k)}(0)=a$$

имеет $k-1$ различных корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$. Для того чтобы функция $f(z)\in I_k(a)$ необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$f(z)=\sum_{i=1}^{k-1}c_i f_{\alpha_i}(z),\quad \sum_{i=1}^{k-1}c_i=1.$$

Теорема 3. *Пусть $Q(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_kz^k$ заданный многочлен k-ой степени и уравнение $P_k(\alpha)=a_k$ имеет $k-1$ различных корней. Тогда в классе $I_k(a_k)$ существует единственная функция $f(z)$, разложение которой в ряд Тэйлора начинается с многочлена $Q(z)$.*

Теорема 4. *При любом a и любом натуральном нечетном k семейство $I_k(a)$ содержит нечетную функцию.*

7. В. Тевялис (КПИ), А. Н. Нафталевич (ВГУ). **О строении множества асимптотических периодов мероморфной функции**

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция и $m(r, f)$ — среднее значение от $\ln^+ |f(re^{i\varphi})|$. Число α назовем m-асимптотическим периодом функции $f(z)$, если порядок функции $f(z+\alpha)-f(z)$ меньше порядка функции $m(r, f)$. Множество всех m-асимптотических периодов мероморфной функции лежит на прямой, проходящей через начало координат, и имеет линейную меру, равную нулю. Кроме того, имеет место

Теорема. *Пусть α и β — два комплексных числа и*

$$a = \overline{\lim_{|n|\to\infty}} \frac{\ln \left| \ln \left| \exp\left(\frac{2\pi i n\alpha}{\beta}\right) - 1 \right| \right|}{\ln |n|}.$$

Если последовательность полюсов мероморфной функции $f(z)$ имеет конечный показатель сходимости χ, а α и β — два m-асимптотических периода этой функции $f(z)$, то $a > 1$ при $\chi < 1$ и $a \geqslant \frac{1}{\chi}$ при $\chi \geqslant 1$.

8. В. Ш. Бурд, П. П. Гирджюс (ВГУ). **О методе И. З. Штокало для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве**

Одним из основных методов исследования устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является метод И. З. Штокало.

В последнее время предложен способ обоснования метода И. З. Штокало, основывающийся на связи между регулярностью дифференциального оператора L и экспоненциальной дихотомией решений однородного уравнения $L(x)=0$ [3]. Эта идея используется ниже для распространения метода И. З. Штокало на дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве E

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon B(t)x. \tag{1}$$

Здесь ε — скалярный положительный параметр, A — линейный непрерывный оператор, действующий в E, $B(t)$ — оператор-функция, представимая в виде

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{i\lambda_k t} B_k \, (\lambda_0 = 0, \ \lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n \neq 0), \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{2}$$

где B_k — линейные вполне непрерывные операторы, действующие в E.

Вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (1) исследуется в предположении, что у оператора A есть точки спектра на мнимой оси, причем каждая из них является собственным значением, которому отвечает конечномерное инвариантное подпространство, и остальные точки спектра λ вещественны и удовлетворяют неравенству $\lambda \leqslant -\Delta$ $(\Delta > 0)$.

Оказывается, что вопрос об устойчивости нулевого решения системы (1) в основных случаях определяется расположением спектра оператора

$$A_p(\varepsilon) = A + \varepsilon A_1 + \ldots + \varepsilon^{p-1} A_{p-1} + \varepsilon^p A_p \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0),$$

где $A_1, \ldots, A_p$ — линейные вполне непрерывные операторы, которые определяются через операторные коэффициенты уравнения (1) и оператор-функции $Y_1(t), \ldots, Y_{p-1}(t)$, представимые в виде (2). Операторы A_i и оператор-функции $Y_i(t)$ $(i=1, \ldots, p)$ ищутся одновременно из системы операторных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dY_1}{dt}=AY_1-Y_1A+B(t)-A_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{dY_p}{dt}=AY_p-Y_pA+B(t)\,Y_{p-1}(t)-Y_{p-1}(t)\,A_1-\ldots-Y_1(t)\,A_{p-3}-A_p. \end{aligned} \tag{3}$$

Операторы A_i и оператор — функции $Y_i(t)$ — последовательно определяются из системы (3) по известной процедуре.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема. *Если при некотором $p>0$ спектр оператора $A_p(\varepsilon)$ при достаточно малых ε лежит строго внутри левой полуплоскости, то найдется такое $\varepsilon_0<0$, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ нулевое решение уравнения* (1) *будет асимптотически устойчиво.*

Если при некотором $p>0$ хотя бы одно собственное значение оператора $A_p(\varepsilon)$ имеет положительную вещественную часть при достаточно малых значениях ε, то найдется такое $\varepsilon_0>0$, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ нулевое решение уравнения (1) будет неустойчиво.

Литература

1. И. З. Штокало, Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, Изд-во АН УССР, 1960.
2. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во АН БССР, 1963.
3. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, Нелинейные почти периодические колебания, Наука, 1970.

9. А. Янушаускас (Новосибирск). Линейные дифференциальные уравнения с частными производными, порядок которых вырожденный

10. Е. Ненишките (ВГУ). О приближении решений уравнения с частными производными фундаментальными решениями

11. Ю. Дегутис (ВГУ). К вопросу о существовании собственных значений для некоторых дифференциальных операторов

Указывается метод, при помощи которого вопрос о существовании собственных значений для дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+P_1(\lambda, x)\,y^{(n-1)}+P_2(\lambda, x)\,y^{(n-2)}+\cdots+P_n(\lambda, x)\,y=0 \tag{1}$$

с краевыми условиями вида

$$y^{(k)}(0, \lambda)=\sum_{i=0}^{n-1} a_{ki}(\lambda)\,y^{(i)}(l, \lambda), \quad k=0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

где $P_j(\lambda, x)=\sum_{k=0}^{m_j} p_{kj}(x)\,\lambda^k$, $j=0, 1, \ldots, n$; $p_{kj}(x)$, $k=0, 1, \ldots, m_j$; $j=1, 2, \ldots, n$ — непрерывны,

$$(-1)^{m_j}\,p_{m_j}{}^{j}(x)>0, \; j=1, 2, \ldots, n,$$

на отрезке $[0, l]$; $a_{ki}(\lambda)$, $i, k=0, 1, \ldots, n-1$, — некоторые полиномы от параметра λ, сводится к изучению некоторой задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

При $n=2$ такая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} v_0' = -P_1(\lambda, x)\, v_1 + P_2(\lambda, x)\, v_3 - v_2 - P_1(\lambda, x) \begin{vmatrix} a_{00}-1 & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} + P_2(\lambda, x)\, a_{01} - a_{10}, \\ v_1' = -P_1(\lambda, x)\, v_1 + P_2(\lambda_1, x)\, v_3 - P_1(\lambda, x) \begin{vmatrix} a_{00}-1 & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} + P_2(\lambda, x)\, a_{01}, \\ v_2' = -P_1(\lambda, x)\, v_2 - P_2(\lambda, x)\, v_4 - P_1(\lambda, x)\, a_{10} - P_2(\lambda, x)\, a_{00}, \\ v_3' = v_5 + a_{11}, \\ v_4' = v_2 + a_{10}, \\ v_5' = -P_1(\lambda, x)\, v_5 - P_2(\lambda, x)\, v_3 - P_1(\lambda, x)\, a_{11} - P_2(\lambda, x)\, a_{01} \end{cases}$$

с однородными начальными условиями.

Исследование этой системы приводит к следующему результату:

Если $\frac{m_1+m_2}{2}$ *— нецелое число, то задача* (1)—(2) (*при* $n=2$) *имеет бесконечную последовательность собственных значений. Кроме того,*

$$c_0\, p^{\frac{2}{m_1+m_2}} < |\lambda_p| < C_0\, p^{\frac{2}{m_1+m_2}},$$

где c_0, C_0 *— постоянные, от* p *независящие.*

12. Ш. Стрелиц (ВГУ). **Некоторые асимптотические свойства целых функций от многих переменных**

13. А. Нафталевич (ВГУ). **О сходимости степенного ряда**

Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Число

$$\varlimsup_{k\to\infty} (n_{k+1} - n_k) = d$$

назовем разреженностью последовательности $\{n_k\}$ и число

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} = \alpha$$

относительной разреженностью той же последовательности.

Теорема. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}$ *имеет конечную разреженность* d. *Если последовательность частичных сумм* $s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots$ *степенного ряда* $\Sigma a_n z^n$ *сходится в* d *различных точках* $z_1, z_2, \ldots, z_d$, *то сам степенной ряд сходится в круге* $|z| < \min |z_k|$, $k=1, 2, \ldots, d$.

Если же относительная разреженность последовательности $\{n_k\}$ *равна нулю и последовательность* $\{s_{n_k}\}$ *сходится равномерно на замкнутом множестве* F, *имеющем положительную емкость, то степенной ряд сходится в круге* $|z| < \min |\zeta|$, $\zeta \in F$.

14. Л. Трушина (ВГУ). **О двойной неоднородной системе разностных уравнений с мероморфными правыми частями**

В работе изучаются целые и мероморфные решения $f(z)$ двойной неоднородной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{L}[f(z)] \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k) = g(z), \\ \mathbf{M}[f(z)] \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i f(z+\beta_i) = h(z), \end{cases} \tag{1}$$

где a_k, α_k и B_i, β_i; $k=1, 2, \ldots, m$; $i=1, 2, \ldots, n$ заданные комплексные числа, а $g(z)$ и $h(z)$ — заданные мероморфные функции. Мы предполагаем, что все точки α_k лежат на одном отрезке, а все точки β_i — на другом отрезке, неколлинеарном с первым.

Действуя на первое из этих уравнений оператором $\mathbf{M}$, а на второе оператором $\mathbf{L}$, мы приходим к *необходимому условию совместности системы* (1): $\mathbf{L}[h(z)] \equiv \mathbf{M}[g(z)]$. *В работе показано, что этого условия и достаточно для существования мероморфных решений системы* (1). *Кроме того, в работе изучаются полюсы и главные части этих мероморфных решений, их рост и условия существования целых реuений системы* (1).

15. А. Гилис (ВГУ). **О мероморфных решениях дифференциально-разностного уравнения**

Пусть l — некоторая прямая, параллельная к действительной оси, и

$$\mathbf{L}_i[f(z)] = \sum_{k=1}^{m_i} a_{ik} f(z+\alpha_{ik}), \qquad i=1, 2, \ldots, n, -$$

разностные операторы с постоянными коэффициентами a_{ik} и действительными шагами α_{ik}, $\alpha_{ij} < \alpha_{i,\, j+1}$. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\mathbf{L}_1[f(z)] + \mathbf{L}_2[f'(z)] + \ldots + \mathbf{L}_n[f^{(n-1)}(z)] = g(z),$$

где $g(z)$ — функция, регулярная на прямой l и обозначим через $M(l)$ совокупность всех мероморфных на l функций $f(z)$, имеющих следующие два свойства: 1) $f(z)$ имеет на прямой l хотя бы один полюс и 2) множество кратностей всех лежащих на этой прямой полюсов функции $f(z)$ ограничено.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z) \in M(l)$ была решением уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы эта функция являлась и решением системы*

$$\mathbf{L}_i[f(z)] = g_i(z), \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где $g_i(z)$ — некоторые функции, регулярные на прямой l.

Теорема 2. *Пусть самый правый и самый левый из шагов всех операторов $\mathbf{L}_i$, $i=1, 2, \ldots n$, являются также шагами оператора $\mathbf{L}_n$ ($\alpha_{nm_n} \geqslant \alpha_{ik}$ и $\alpha_{ni} \leqslant \alpha_{ik}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m_i$). Если мероморфное решение $f(z)$ уравнения* (1) *имеет хотя бы один полюс на прямой l, то $f(z) \in M(l)$.*

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 2 и $f(z)$ — мероморфное решение уравнения* (1) *с целой правой частью $g(z)$, то $f(z)$ является и решением системы* (2) *с целыми апрвыми частями $g_i(z)$.*

СЕКЦИЯ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

1. В. Близникас (ВГПИ). **Неголономная гиперповерхность пространства проективной связности**

Рассматривается неголономная гиперповерхность пространства проективной связности, структурные уравнения которого имеют вид:

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jab}^i\, \omega^a \wedge \omega^b \qquad (i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ a,\ b=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Если подвижный репер $\{A_i\}$ выбран так, что точки A_α помещены в опорную гиперплоскость неголономной гиперповерхности, то дифференциальные уравнения неголономной гиперповерхности можно записать в следующем виде ($\alpha=1,\ \ldots,\ n-1$):

$$\omega_\alpha^n = \lambda_{\alpha\beta}\, \omega^\beta + \lambda_\alpha\, \omega^n.$$

Изучена структура дифференциальных продолжений фундаментального объекта $\{\lambda_{\alpha\beta},\ \lambda_\alpha\}$. Получен аналог соответствия Пантази, найдены квадрики Ли и некоторые проективные нормали неголономной гиперповерхности пространства проективной связности. Отдельно рассмотрен случай $n=3$.

2. И. Близникене (ВГПИ). **О геометрии оснащенных многообразий Грассмана**

Рассматривается многообразие Грассмана, оснащенное относительным тензорным полем. Изучены дифференциальные продолжения этого поля и найдены некоторые подобъекты фундаментального дифференциально-геометрического объекта третьего порядка. Доказано, что при $n=3$ с оснащенным многообразием Грассмана (оснащение задается при помощи дважды ковариантного тензорного поля) всегда ассоциируются следующие неголономные многообразия:

1) комплекс коррелятивных элементов;
2) неголономный комплекс коррелятивных элементов;
3) неголономный комплекс в смысле К. И. Гринцевичюса.

Найдены аффинные связности, охваченные дифференциальными продолжениями фундаментального дифференциально-геометрического объекта многообразия Грассмана при произвольном n.

Отдельно рассмотрен случай $n=2$.

3. З. Лупейкис (ВГПИ). **К вопросу о геометрии систем дифференциальных уравнений в частных производных**

Рассматривается геометрия одного специального дифференциального уравнения третьего порядка в частных производных. Под геометрией рассматриваемого дифференциального уравнения третьего порядка в частных производных понимается геометрия пространства m-мерных поверхностных элементов второго порядка $K_{n,\ m}^{(2)}$, являющегося подпространством пространства $K_{n,\ m}^{(3)}$, с заданным дифференциально-геометрическим объектом, компонентами которого являются функции — коэффициенты рассматриваемого дифференциального уравнения. Приводятся структурные уравнения пространства $K_{n,\ m}^{(2)}$. Введены линейные дифференциально-геометрические связности и аффинные связности пространства $K_{n,\ m}^{(2)}$ с различным порядком усеченности (см. [1], [2]).

Для случая, когда рассматривается данное дифференциальное уравнение относительно группы линейных преобразований независимых переменных доказано существование внутренних вышеупомянутых связностей пространства $K_{n,\ m}^{(2)}$, т.е. объектов связностей выражающихся через компоненты данного дифференциально-геометрического объекта и через компоненты его дифференциальных продолжений. Получены формулы для расчета всех этих связностей пространства $K_{n,\ m}^{(2)}$.

Литература

1. В. И. Близникас, О геометрии систем дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, Лит. матем. сб., VII, № 2, (1967), 249–264.
2. В. И. Близникас, О геометрии нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка, Лит. матем. сб., VII, № 2, (1967), 231–248.

4. И. Х. Медведевайте (ВГПИ). **О тензорных структурах касательного пучка метрического пространства гиперплоских элементов**

В метрическом пространстве гиперплоских элементов с евклидовой связностью [1] задана m-мерная поверхность. Из деривационных уравнений поверхности получаем ряд тензорных величин. При помощи этих величин, а также компонент метрического тензора пространства и компонент касательных и нормальных векторов поверхности строим некоторые геометрические объекты. В расслоенном многообразии, слоями которого являются касательные пространства базы, этими геометрическими объектами определяются следующие типы тензорных структур: структуры почти произведения, почти контактные структуры гиперболического типа и f- структуры.

В структурной группе расслоенного многообразия выделяются инвариантные подгруппы, т.е. группы стационарности построенных геометрических объектов. Полученные подгруппы принимаем за структурные группы новых расслоенных многообразий, называемых подрасслоениями расслоенного многообразия [2]. В этих подрасслоениях найдены тензорные структуры, определяемые подобъектами построенных геометрических объектов.

Литература

1. И. Х. Медведевайте, Некоторые вопросы геометрии метрического пространства гиперплоских элементов, Лит. матем. сб., VI, № 4 (1966), 533–539.
2. Н. М. Остиану, О некоторых проективно-дифференциальных структурах на дифференцируемом многообразии, Тр. геом. семинара, т. 2, 1969, 207–246.

5. А. Пекарскене (ВГПИ). **О многообразии вырожденных плоских кривых третьего порядка в трехмерном проективном пространстве**

Известно, что уравнение всякой кривой второго порядка имеет вид:

$$\begin{cases} a_{ij}\,x^i x^j = 0, \\ x^4 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ и x^i – однородные координаты точки относительно координатного тетраэдра $\{A_i\}$ $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$. Поместив вершины A_1, A_2, A_3 тетраэдра $\{A_i\}$ на кривой (1), получаем:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0.$$

К кривой (1) проводим касательные в точках A_1, A_2, и A_3 и находим точки их пересечения M_1, M_2 и M_3. Далее, требуя совпадения точки

$$N = A_1 + A_2 + A_3$$

с точкой пересечения прямых, соединяющих точки M_1, M_2 и M_3 с противолежащими вершинами тетраэдра A_1, A_2 и A_3, найдем, что

$$a_{12} = a_{13} = a_{23}.$$

Тогда кривая (1) принимает вид:

$$\begin{cases} x^1 x^2 + x^1 x^3 + x^2 x^3 = 0. \\ x^4 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Далее рассматривается первая дифференциальная окрестность восьмипараметрического многообразия, образующим элементом которого является плоскость, лежащая в ней кривая второго порядка и прямая, пересекающая эту кривую в двух действительных точках. Совместив ребро A_1A_2 с упомянутой прямой, получаем, что неподвижность образующего элемента рассматриваемого многообразия определяется вполне интегрируемой системой:

$$\begin{aligned} &\omega_1^2=\omega_2^1=\omega_3^1+\omega_3^2=\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_3^2=\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^2-\omega_3^1=0, \\ &\omega_1^4=\omega_2^4=\omega_3^4, \\ &\omega_1^3=\omega_2^3=0, \end{aligned} \tag{3}$$

где ω_i^j — формы инфинитезмальных проективных перемещений тетраэдра $dA_i=\omega_i^jA_j$, удовлетворяющие уравнениям структуры трехмерного проективного пространства

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k\,\omega_k^j].$$

Тогда это многообразие определяется линейными дифференциальными уравнениями

$$\omega_p^3+\alpha_p^I\Theta_I, \qquad (I=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 8;\ p=1,\ 2) \tag{4}$$

и соответствующими внешними квадратичными уравнениями, где

$$\begin{aligned} &\Theta_1=\omega_1^2;\ \Theta_2=\omega_2^1;\ \Theta_3=\omega_3^1+\omega_3^2; \\ &\Theta_4=\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_3^2;\ \Theta_5=\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_3^1; \\ &\Theta_6=\omega_1^4;\ \Theta_7=\omega_2^4;\ \Theta_8=\omega_3^4. \end{aligned}$$

Коэффициенты α_p^I образуют фундаментальный объект первого порядка многообразия (4), а $\alpha_p^{\bar{I}}$ ($I=1, 2, 3, 4, 5$) образуют подобъект упомянутого объекта.

Получена геометрическая интерпретация всех коэффициентов α_p^I.

6. Л. Стиклаките (ВГПИ). **Некоторые вопросы теории неголономных поверхностей**

7. Ю. Шинкунас (ВГПИ). **О геометрии неголономной пеосрхности риманова пространства**

Определение. Риманово пространство V_n с заданным полем m-мерных плоскостей называется неголономной поверхностью V_n^m риманова пространства V_n.

Дифференциальные уравнения этой поверхности в частично канонизированном репере имеют вид

$$\omega_\alpha^a=\Lambda_{\alpha\beta}^a\,\omega^\beta+\Lambda_{\alpha b}^a\,\omega^b$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad a,\ b=m+1,\ \ldots,\ n;\quad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где ω_i^j, ω^k — формы связности риманова пространства без кручения.

Используя метод разверток [1], рассматриваются кривые на неголономной поверхности V_n^m (общие и интегральные), найдены векторы абсолютной, относительной и нормальной кривизн интегральной кривой и связи между ними, введено понятие асимптотического поля многомерных направлений, найдены условия сопряженности двух многомерных касательных направлений. Рассмотрены некоторые свойства геодезических и асимптотических кривых неголономной поверхности V_n^m, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы V_n^m была вполне геодезической.

Литература

1. В. И. Близникас. Дифференциальная геометрия неголономной гиперповерхности риманова пространства, Лит. матем. сб., **XI**, № 1 (1971), **63**.

8. К. Гринцявичюс (ВГУ). **О фундаментальном объекте второго порядка неголономного комплекса**

9. А. Ионушаускас (ВГУ). **Некоторые расслоения над гладким многообразием**

Изложение ведется глобально, следуя духу книги [2]; под гладкостью понимается гладкость класса C^∞.

На гладком n-мерном многообразии M имеется алгебра над $\mathbf{R}$ (поэтому она является и кольцом) $F=F(M)$ всевозможных гладких функций $M\to\mathbf{R}$. Через L обозначим F-модуль всевозможных R-линейных отображений $F\to F$. Рассмотрим следующие подмодули этого модуля L:

$D^{(1)}=D^{(1)}(M)$ — модуль всех дифференцирований алгебры F; его элементы — это гладкие векторные поля (см. [2]) на M.

$D^{(s)}=D^{(s)}(M)$ — подмодуль модуля L, порожденный всеми элементами вида $X, X_2\circ X_1, \ldots, X_s\circ\ldots\circ X_1$ ($X, X_1, \ldots, X_s$ пробегают $D^{(1)}$).

Над координатной окрестностью $U\subset M$ с локальными координатами x^i эти модули $\big($точнее, $F(U)$-модули $D^{(1)}(U), \ldots, D^{(s)}(U)\big)$ имеют естественные базисы:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \text{ — базис } F(U)\text{-модуля } D^{(1)}(U);$$

. . . .

$$\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, \ldots, \frac{\partial^s}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_s}} \text{ — базис } F(U)\text{-модуля } D^{(s)}(U).$$

Очевидным образом можно выписать функции перехода и получить две серии расслоений над M:

исходя из $D^{(1)}(M)$, получается, во-первых, касательное расслоение $T(M)$ и, во-вторых, главное расслоение базисов $B(M)$;

вообще, исходя из $D^{(s)}(M)$, получается некоторое векторное расслоение $\big($будем употреблять обозначение $T^{(s)}(M)\big)$ и главное расслоение $\big($обозначение: $B^{(s)}(M)\big)$. В случае $s=1$, $T^{(s)}=T$ и $B^{(s)}=B$. При любом $s\geqslant 1$ модуль $D^{(s)}(M)$ является модулем гладких сечений расслоения $T^{(s)}(M)$. Структурной группой служит так называемая дифференциальная группа D_n^s (в обозначениях [1], стр. 164). Само главное расслоение $B^{(s)}(M)$ может быть названо расслоением „базисов s-го порядка".

Пользуясь обозначениями работы [1], сформулируем основное утверждение настоящего сообщения.

Теорема. *Главное расслоение* M_n^s (см. [1], стр. 162) *форм* $\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{j_1 j_2}, \ldots, \omega^i_{j_1\ldots j_{s-1}}$ *изоморфно расслоению* $B^{(s)}(M)$.

Действительно, M_n^s основано на правом действии дифференциальной группы, а $B^{(s)}(M)$ — на левом действии. Изоморфность станет очевидной, если в качестве слоевых координат расслоения M_n^s использовать

$$x^i_j, g^i_{j_1 j_2}, \ldots, g^i_{j_1\ldots j_s}, \text{ где } g^i_{j_1\ldots j_r} = -\sum_{k_1,\ldots,k_r} x^i_{k_1\ldots k_r} x^{k_1}_{j_1}\ldots x^{k_r}_{j_r}.$$

Дуальное истолкование очевидно и для других конструкций на гладком многообразии.

Литература

1. Г. Ф. Лаптев, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии, Труды Геометрического семинара, 1 (1966), 139—189.

2. С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, „Мир", М., 1964.

10. Г. Маркшайтис (ВГУ). **Когомологии некоторых про-p-групп**

11. А. Матузявичюс (ВГУ). **Обобщенные микрорасслоения и локально плоские вложения многообразий**

12. Д. Петрушкявичюте (КПИ). **Групповые свойства системы трех квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными**

13. А. Урбонас (ВГПИ). **О движениях в пространстве гиперплоскостных элементов аффинной связности**

Рассматривается пространство гиперплоскостных элементов (x^i, u_k) с аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x, u)$ и изучается группа G_r инфинитезимальных преобразований $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\,t$. Доказано, что G_r имеет порядок не выше n^2 $(r < n^2 + n)$.

14. Е. Ушпалене (ВИСИ), П. Вашкас (ВГУ). **Некоторые геометрические характеристики расслоения конфигураций прямых конусами второго порядка**

15. А. Крищюнайте)ШПИ). **О линейчатой геометрии эллиптического пространства**

Рассматривается многообразие прямых Q_4 трехмерного эллиптического пространства S_3. Оно является метрическим многообразием [1].

Легко показать, что Q_4 — почти двойное многообразие, кроме того, структурный почти двойной аффинор ковариантно постоянен в римановой связности, определенной метрикой многообразия Q_4, причем эта метрика является B-метрикой по отношению к структурному аффинору. Следовательно, Q_4 является B-пространством гиперболического типа.

Известно [2], что на гиперповерхностях всякого B-пространства гиперболического типа при почти контактном оснащении, инвариантно связанным с нормальным оснащением, индуцируется почти контактная метрическая структура гиперболического типа П-го рода. Так как существует взаимно однозначное соответствие между гиперповерхностями в пространстве Q_4 и комплексами прямых пространства S_3, то требования на характер этой почти контактной структуры (нормальность, интегрируемость) позволяют выделить некоторые комплексы или классы комплексов в пространстве S_3.

Найден класс комплексов, для которых гиперповерхности в Q_4 имеют интегрируемую почти контактную метрическую структуру гиперболического типа II-го рода. Он состоит из тех и только тех комплексов, которые являются однопараметрическими семействами конгруенций нормалей к поверхностям нулевой гауссовой кривизны.

Найдены примеры комплексов в S_3, для которых соответствующие гиперповерхности в Q_4 имеют нормальную, а, следовательно, и интегрируемую [2] почти контактную метрическую структуру гиперболического типа II-го рода. Этим условиям удовлетворяют линейные комплексы, в том числе специальные линейные комплексы.

Литература

1. Б. А. Розенфельд, Внутренняя геометрия множества прямых эллиптического пространс⁻ва, Ученые записки МГУ, 1944, выпуск 73, кн. 5, 49—58.
2. А. Л. Крищюнайте, Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1968, 128, кн. 3, 55—75.

СЕКЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

1. Э. Вилкас (ИФМ). **О критериях оптимальности**

2. В. Бистрицкас (ИФМ). **Непрерывный процесс управления с двумя функционалами цели**

3. С. Вакринене (ИФМ). **Динамическая игра, когда игроки платят за каждый шаг**

Рассматривается следующая динамическая игра. В начальный момент игроки находятся в позиции (p_0, r_0). В k-ый момент времени первый игрок выбирает $i_k \in \{1, \ldots, m\}$, второй, соответственно, выбирает $j_k \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда позиция (p, r) изменяется согласно формулам:

$$p_k = p_{k-1} + a_{i_k j_k},$$

$$r_k = r_{k-1} + b_{i_k j_k},$$

где $A = \| a_{ij} \|$, $B = \| b_{ij} \|$ — заданные матрицы, такие, что $a_{ij} \geqslant 0$ $b_{ij} \geqslant 0$, $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (0, 0)$ и существуют i', j' и i'', j'' такие, что $a_{i'j'} = 0$, $b_{i'', j''} = 0$. Пусть игра останавливается, когда точка (p, r) выходит из круга L с центром в точке (p_0, r_0). Контур круга разобъем на три связные части K_1, K_2, K_3 и определим функции выигрыша

$$M(p, r) = \begin{cases} M_1 - mf(p_0, r_0), & \text{если} \quad (p, r) \in K_1, \\ M_2 - mf(p_0, r_0), & \text{если} \quad (p, r) \in K_2, \\ M_3 - mf(p_0, r_0), & \text{если} \quad (p, r) \in K_3, \end{cases}$$

$$N(p, r) = \begin{cases} N_1 - nf(p_0, r_0), & \text{если} \quad (p, r) \in K_1, \\ N_2 - nf(p_0, r_0), & \text{если} \quad (p, r) \in K_2, \\ N_3 - nf(p_0, r_0), & \text{если} \quad (p, r) \in K_3, \end{cases}$$

где $m > 0$, $n > 0$, $M_1 > M_3 > M_2$, $N_3 > N_1 > N_2$ и функция $f_0(p, r)$ означает число шагов, сделанных во время игры.

Прямые, проведенные через точки деления контура, параллельные координатным осям, разобьют область L на три треугольника и три прямоугольника. Треугольник, прилегающий к дуге K_i, обозначим через L_i, а прямоугольник, прилегающий к K_i и K_j, — через L_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. Оставшийся прямоугольник обозначим через L_{123}.

В областях L_1, L_2, L_3, L_{12} и L_{23} оптимальным поведением будет поведение, описанное в статье [1]. Для каждой точки (p, r) обозначим:

1. Через $C_1(p, r)$ множество пар чистых стратегий (i, j), для которых существует такое натуральное число l, что точка $(p + la_{ij}, r + lb_{ij}) \in L_{12}$.

$$C_{12}(p, r) = \{ (i, j) : b_{ij} = \max_{(i, j) \in C_1(p, r)} b_{ij}.$$

Аналогично определяются множества $C_2(p, r)$, $C_3(p, r)$ и $C_{23}(p, r)$. Через $f_{12}(p, r)$ обозначим среднее минимальное число шагов, необходимых для того, чтобы из точки (p, r) попасть в область L_{12}, через $f_{23}(p, r)$, — чтобы попасть в область L_{23}. Через $f_2(p, r)$ — среднее минимальное число шагов в игре при начальной точке $(p, r) \in L_2$. Пусть

$$\overline{M}(p, r) = M_1 - mf_{12}(p, r),$$

$$\underline{M}(p, r) = M_3 - mf_{23}(p, r),$$

$$\overline{N}(p, r) = N_3 - mf_{23}(p, r),$$

$$\underline{N}(p, r) = N_1 - nf_{12}(p, r).$$

Рассматриваются функциональные уравнения:

$$U_1(p,\ r)=\begin{cases} \max\{\mathrm{val}\,\|\,U_1(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\,\|-m,\ \underline{M}(p,r)\}, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если} & (p,r)\in L_{123}, \\ M_1-mf_{12}(p,r), \quad \text{если} & (p,r)\in L_{12}, \\ M_2-mf_2(p,r), \quad \text{если} & (p,r)\in L_2, \\ M_3-mf_{23}(p,r), \quad \text{если} & (p,r)\in L_{23}. \end{cases}$$

$$U_2(p,\ r)=\begin{cases} \max\{\mathrm{val}\,\|\,U_2(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\,\|-n,\ \underline{N}(p,r)\}, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если} & (p,r)\in L_{123}, \\ N_1-nf_{12}(p,r) \quad \text{если} & (p,r)\in L_{12}, \\ N_2-nf_2(p,r), \quad \text{если} & (p,r)\in L_2, \\ N_3-nf_{23}(p,r) \quad \text{если} & (p,r)\in L_{23}. \end{cases}$$

Доказывается, что они имеют решения $V_1(p, r)$ и $V_2(p, r)$ и что, начав с точки p', r', игроки могут гарантировать себе средние выигрыши $V_1(p', r')$ и $V_2(p', r')$, если могут сообщить друг другу о своем решении сделать уступку.

Рассмотрим два разбиения точек области L_{123}.

1. $L_{123}=L'\cup L''\cup L^{\circ}$.

$(p,r)\in L'$, если $\underline{M}(p,r)\geqslant\overline{M}(p,r)$,

$(p,r)\in L''$, если $\underline{N}(p,r)\geqslant\overline{N}(p,r)$,

$(p,r)\in L^{\circ}$, если $\begin{cases}\underline{M}(p,\ r)<\overline{M}(p,r),\\ \underline{N}(p,r)<\overline{N}(p,r).\end{cases}$

2. $L_{123}=\alpha_0\cup\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_{12}$.

$(p,r)\in\alpha_0$, если

$\mathrm{val}\,\|\,V_1(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\,\|-m>\underline{M}(p,r)$,

$\mathrm{val}\,\|\,V_2(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\,\|-n>\underline{N}(p,r)$,

$(p,r)\in\alpha_1$, если

$\mathrm{val}\,\|\,V_1(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\,\|-m\leqslant\underline{M}(p,r)$

$\mathrm{val}\,\|\,V_2(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\,\|-n>\underline{N}(p,r)$.

$(p,r)\in\alpha_2$, если

$\mathrm{val}\,\|\,V_1(p+a_{ij},r+b_{ij})\,\|-m>\underline{M}(p,r)$,

$\mathrm{val}\,\|\,V_2(p+a_{ij},r+b_{ij})\,\|-n\leqslant\underline{N}(p,r)$,

$(p,r)\in\alpha_{12}$, если

$\mathrm{val}\,\|\,V_1(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\,\|-m\leqslant\underline{M}(p,r)$

$\mathrm{val}\,\|\,V_2(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\,\|-n\leqslant\underline{N}(p,r)$.

Основные утверждения:

1) $L'\cap L''=\varnothing$,
2) $L'\subset\alpha_1$,
6) $L''\subset\alpha_2$,
4) $L^{\circ}\subset\alpha_{12}$.

С помощью доказанного определяется оптимальное поведение в областях L', L'', L и рекуррентные соотношения для средних выигрышей.

Литература

1. С. П. Вакринене, Динамическая игра, когда интересы игроков совпадают, Лит. матем. сб., X, № 2 (1970), 229–234.

4. С. Скерус (ИФМ). **К вопросу коалиционных структур**

В заметке обобщается одна теорема Г. Радстрома [1], доказанная им для игр с постоянной суммой.

Пусть дана коалиционная игра $<I_n, v(S)>$, где $I_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, $v(S)$ — супераддитивная характеристическая функция.

Любое разбиение множества I_n на непересекающиеся непустые подмножества называется коалиционной структурой.

Рассмотрим коалиционные структуры F следующего вида:

1. $I_n \in F$, $\Phi \notin F$.

2. Для каждого $S \in F$, $|S| \geqslant 2$ ($|S|$ — число элементов S) существует точно одна пара непересекающихся непустых подмножеств S_1 и S_2, таких, что $S_1 \cup S_2 = S \cdot S_1$ и S_2 называются партиями S, а S_2 — копартией S_1.

3. Каждое $S \in F$, $S \neq I_n$ есть партия точно одного $S' \in F$.

Максимальная последовательность коалиций $S_1, S_2, \ldots, S_k \in F$ таких, что S_2 — копартия S_1, S_i — копартия $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{i-1}$, $i=2, 3, \ldots, k$, называется цепью.

Каждой коалиционной структуре F соответствует некоторый дележ, единственным образом определяемый данной процедурой образования коалиций.

Обозначим через v_i, v_{ij}, v_{ijl}, $v_{ij\ldots k}$ соответственно величины $v(S_i)$, $v(S_i \cup S_j)$, $v(S_i \cup S_j \cup S_l)$, $v(S_i \cup S_j \cup \ldots \cup S_k)$, а через $v(S_1 | S_2, S_3, \ldots S_k)$ — сумму, которую получает коалиция S_1 в данной коалиционной структуре, когда ее цепь есть $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

Теорема. *Для любой игры и коалиционной структуры F* $2^{k-1} v(S_1 | S_2, \ldots, S_k) = v_1 - v_2 - \ldots - v_k + v_{12} + v_{13} + \ldots + v_{1k} - v_{23} - \ldots - v_{k-1k} \pm \ldots + v_{12\ldots k}$, *где + берется для тех $v_{j\ldots l}$, среди индексов которых содержится* 1.

Теорема доказывается по методу математической индукции. При $k=2$ применяется формула Шепли для модели торга, а далее общепринятая процедура дележа в игре трех лиц.

Если в коалиционной структуре F цепью для $S_1 \cup S_2$ является $S_1 \cup S_2, S_3, \ldots, S_k$, а в F' цепью для $S_2 \cup S_3$ является $S_2 \cup S_3, S_1, S_4, \ldots, S_k$, то изменение структуры F на F' называется слабым изменением.

Полученный дележ обладает свойством стабильности относительно слабого изменения структуры F и дает каждой коалиции данной структуры выигрыш не меньше значения ее характеристической функции, чего вообще нельзя сказать о коалициях, не входящих в данную структуру.

Литература

1. H. Radström, A properties of stability possessed by certain imputations, Ann. Math. Studies, 52, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1964.

5. А. Моркелюнас (ВГУ). **Обобщение правила большинства**

6. Д. Суджюте (ВГУ). **Неантагонистические игры на единичном квадрате**

Ядра рассматриваемой игры определены на замкнутом единичном квадрате и имеют вид для I-го и II-го игроков соответственно

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} M(\xi, \eta), & \eta > m(\xi), \\ k(\xi), & \eta = m(\xi), \\ N(\xi, \eta), & \eta < m(\xi), \end{cases}$$

$$L(\xi, \eta) = \begin{cases} P(\xi, \eta), & \eta > r(\xi), \\ l(\xi), & \eta = r(\xi), \\ R(\xi, \eta), & \eta < r(\xi), \end{cases}$$

где

1) функции $m(\xi)$, $r(\xi)$ непрерывны, строго возрастают и $m(0)=r(0)=0$, $m(1)=r(1)=1$;

2) функции M, N строго возрастают по ξ, а P, R по η и все они ограничены;

3) для точки $\xi\in(0, 1)$ выполнено хотя бы одно из следующих соотношений:

$$k(\xi)<M\Big(\xi, m(\xi)\Big), \quad k(\xi)\leqslant N\Big(\xi, m(\xi)\Big),$$

$$k(\xi)=M\Big(\xi, m(\xi)\Big)=N\Big(\xi, m(\xi)\Big)$$

и хотя бы одно из следующих соотношений:

$$l(\xi)\leqslant P\Big(\xi, r(\xi)\Big), \quad l(\xi)<R\Big(\xi, r(\xi)\Big),$$

$$l(\xi)=R\Big(\xi, r(\xi)\Big)=P\Big(\xi, r(\xi)\Big);$$

4) функции M, N непрерывны по ξ и P, R непрерывны по η.

Стратегиями обоих игроков являются множества функций распределения.

Пару стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\int_0^1\int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy_0(\eta)\leqslant \int_0^1\int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta),$$

$$\int_0^1\int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy(\eta)\leqslant \int_0^1\int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta),$$

где $x(\xi)$, $y(\eta)$ — любые стратегии соответственно I и II-го игроков, назовем уравновешенной.

Спектры функций распределения в уравновешенной паре обозначим соответственно S_1 и S_2.

Предполагаем, что уравновешенные пары в игре существуют. Как известно, спектр, будучи замкнутым множеством, представляет собой сегмент или получается удалением из него конечного или счетного множества интегралов. Далее говорится об удаляемых интервалах, содержащихся в подынтервале $[a, b]$ интервала $[0, 1]$.

Пусть выполнены условия 1), 2) во всем интервале (a, b) действительно неравенство $r(\xi)>m(\xi)$ и $m(a)=r(a)$, $m(b)=r(b)$. Тогда делаются следующие выводы. Удаляемыми интервалами могут быть одновременно (a, b) и $\big(r(a), r(b)\big)$ соответственно для I-го и II-го игроков. В удаляемом, чтобы получить S_1, интервале (c_1, d_1), $c_1\neq a$, $d_1\neq b$ для любых ξ_1, $\xi_2\in(c_1, d_1)$ выполняется соотношение $r(\xi_1)\geqslant m(\xi_2)$, а в удаляемом, чтобы получить S_2, интервале (c_2, d_2), $c_2\neq r(a)$, $d_2\neq r(b)$ для любых η_1, $\eta_2\in(c_2, d_2)$ выполняется соотношение $r^{-1}(\eta_1)\leqslant m^{-1}(\eta_2)$. Для получения S_1 и S_2 соответственно могут быть удалены интервалы вида (c, b), $c\in S_1$, и $\big(d, r(b)\big)$, $d\in S_2$, где $m(c)\leqslant d\leqslant r(c)$, но тогда на вышеупомянутые интервалы (c_1, d_1) и (c_2, d_2) налагаются некоторые дополнительные требования. Это потому, что в условиях 1), 2) из соотношения $(a_1, b_1)\cap S_1=\varnothing$ следует соотношение $\big(r(a_1), r(b_1)\big)\cap S_2=\varnothing$ и соотношение $(a_2, b_2)\cap S_2=\varnothing$ влечет за собой $\big(m^{-1}(a_2), m^{-1}(b_2)\big)\cap S_2=\varnothing$. Далее, если известно, что для получения S_1 (S_2) удаляется интервал (a, c) (интервал $\big(r(a), c\big)$), то можно утверждать, что $c=b$ $\big(c=r(b)\big)$.

Аналогичные выводы можно сделать в случае, когда вместо неравенства $r(\xi)>m(\xi)$ выполняется $r(\xi)<m(\xi)$.

Если в условиях 1) — 4) выполнено соотношение $m(\xi)=r(\xi)$ для $\xi\in[a, b]$, то для получения S_1 и S_2 можно удалять только интервалы (a, c) и $(r(a), r(c))$, соответственно, причем для обоих спектров одновременно.

На основании этих утверждений можно найти достаточные условия, чтобы весь интервал (a, b) не имел точек из спектра S_1 (а интервал $\big(r(a),\ r(b)\big)$ не имел точек из спектра S_2). Эти условия включают некоторые дополнительные соотношения между значениями функций M и N, P и R в окрестностях точек пересечения кривых $m(\xi)$ и $r(\xi)$.

7. Ш. Раудис (ИФМ). **Представление условной вероятности ошибки классификации статистикой W в терминах элементарных статистик**

8. В. Матулис (ИФМ). **Универсальный алгоритм машинной сортировки информации массивов**

9. В. Матулис (ИФМ). **О двойственном методе поиска вывода в исчислении предикатов**

10. А. Плюшкявичене (ИФМ). **Обратный метод установления выводимости для аксиоматических теорий с равенством**

При решении вопросов, касающихся поиска вывода в различных аксиоматически заданных математических теориях и построения алгорифмов, нацеленных на доказательство математических теорем, возникает задача обращения со специфическими аксиомами теорий. В заметках [1] и [2] был предложен общий подход для построения секвенциальных вариантов аксиоматических теорий с равенством, позволяющий достаточно эффективным образом использовать специфические аксиомы теорий. В настоящее время предложены методы установления выводимости для классического исчисления предикатов и исчисления предикатов с равенством, такие, как обратный метод [3], [4], метод резолюций [5], хорошо приспособленные для машинных реализаций. Поэтому представляется важным распространение предложенных методов, в частности, принципиальной схемы обратного метода для классического исчисления предикатов с равенством [4], на аксиоматические теории.

Ниже излагается формулировка обратного метода для аксиоматических теорий с равенством, получаемая при непосредственном объединении результатов [1], [2] и [4]. При этом используются обозначения и терминология из [1]—[4] и [6]. Вместо исчисления $G^=$ [4] рассматривается исчисление T_1 [2], равнообъемное произвольному прикладному исчислению L [6]. Рассматривается выводимость секвенции $\to F$ в исчислении T_1, где F — некоторая формула в языке прикладного исчисления L. Заметим, что секвенциальное исчисление T_1 таково, что при поиске вывода секвенции $\to F$ нарушается свойство подформульности, так как правило (5) (см. [2]) вводит подформулы не исходной секвенции $\to F$, а подформулы некоторых специфических аксиом рассматриваемого прикладного исчисления L. В связи с этим расширяется понятие разбивки (см. [3]), а именно, в разбивку включаются отрицания всех минус-формул отрицательных специфических акисом (см. [2]) и отрицания равенств, входящих в уравнивающие аксиомы, имеющие более одного дизъюнктивног члена [2]. В связи с пунктом 1) построения исчисления T_1 (см. [2]) естественным образом расширяются правила построения благоприятных наборов А и Б (см. [4]). Для специфических аксиом вида $t=\omega$ (см. [1]) вводятся по расширенному правилу Авсп [4] вспомогательные наборы, являющиеся пустыми наборами с таблицей. Несколько изменяются правила обращения с таблицей с целью учета происхождения термов, входящих в таблицу. Выводимость секвенции $\to F$ в исчислении T_1 эквивалентна выводимости пустого F-набора в построенном вышеописанным образом исчислении благоприятных F-наборов.

Уточняя и специализируя предложенную формулировку обратного метода, можно строить машинные алгорифмы для доказательства теорем конкретных теорий с помощью ЭВМ.

Литература

1. А. Ю. Плюшкевичене, Устранение правил типа сечения в аксиоматических теориях с равенством, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, Л., 16, (1969), 175–184.
2. А. Ю. Плюшкевичене, О специализации использования аксиом при поиске вывода в аксиоматических теориях с равенством, Зап. научн. семинаров ЛОМИ (в печати).
3. С. Ю. Маслов, Обратный метод установления выводимости для логических исчислений, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 98, (1968), 26–87.
4. С. Ю. Маслов, Распространение обратного метода на исчисление с равенством, Зап. научн. семинаров ЛОМИ (в печати).
5. J. A. Robinson, A machine-oriented logic based on resolution principle. J. Assoc. Comput. Mach., 12, 1, (1965), 23–41.
6. М. Г. Рогава, О секвенциальных вариантах прикладных исчислений предикатов, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, Л., 4, (1967), 189–200.

11. А. Плюшкявичене (ИФМ). **Об одном варианте арифметической системы Пресбургера**

12. Н. Добровинская, (ВГУ, Р. Плюшкявичюс (ИФМ). **К вопросу о заменимости схемы индукции**

Целью настоящего сообщения является: 1) конструктивное доказательство заменимости в классической арифметике первого порядка применений схемы индукции, в которых формула индукции не содержит кванторов и символа умножения, некоторыми другими более простыми постулатами*; 2) построение некоторого специализированного секвенциального варианта классической арифметики первого порядка.

1. Обозначим через P исчисление, получаемое из исчисления предикатов с равенством (см. напр., [3, § 73]) путем присоединения специфических арифметических постулатов (см., напр., [3, § 19]):

1. $a'=b'\supset a=b$, 2. $\neg\,(a'=0)$,

3. $a+0=a$, 4. $a+b'=(a+b)'$,

5. $a\cdot 0=0$, 6. $a\cdot b'=a\cdot b+a$,

7. $\left([A]^{\alpha}_{0}\ \&\ \forall x\,([A]^{\alpha}_{x}\supset[A]^{\alpha}_{x'})\right)\supset[A]^{\alpha}_{t}$,

где α — произвольная свободная переменная.

Пусть u — терм, содержащий символ умножения, и $[B]^{\alpha}_{u}$ — произвольная формула. Тогда вхождение символа умножения в формулу $[B]^{\alpha}_{u}$ будем называть фиктивным, если существует терм w, не содержащий символа умножения, и такой, что формула $[B]^{\alpha}_{u}$ может быть выведена из формулы $[B]^{\alpha}_{w}$ путем применений аксиом вида $r=s$. Обозначим через 7′ ограниченную схему индукции, в которой формула $[A]^{\alpha}_{t}$ содержит либо кванторы, либо нефиктивные вхождения символа умножения.

Через P_1 обозначим систему, получающуюся из P путем замены схемы индукции 7 ограниченной схемой индукции 7′ и присоединением следующих аксиом:

B1. $\neg\,(x=0)\supset\exists^{y}(x=y')$; B2. $x+y=y+x$;

B3. $(x+y)+z=x+(y+z)$; B4. $x+y=x+z\supset y=z$.

* Заменимость схемы индукции в бескванторной арифметике рассмотрена (пользуясь теоретико-модельными методами) в работах [1] и [2].

Конструктивными методами доказана следующая

Теорема 1. *Исчисления P и P_1 равнообъемны.*

Для доказательства теоремы 1 используются следующие леммы.

Лемма 1. *По произвольному выводу в исчислении P можно построить вывод с той же последней секвенцией, не содержащий применений схемы индукции с фиктивными вхождениями символа умножения.*

Лемма 2. *Пусть A — произвольная арифметическая формула, не содержащая кванторов и символа умножения, а $D \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \ \& \ D_i$ — конъюнктивная нормальная форма формулы A, тогда формула $[D]^\alpha_0 \& \forall_x ([D]^\alpha_x \supset [D]^\alpha_{x'})) \supset [D]^\alpha_t$ выводима в исчислении P_1.*

При доказательстве леммы 2 рассматриваются различные случаи в соответствии с тем, какие элементарные члены формул D_i содержат вхождения терма t, причем при построении формулы, указанной в лемме 2, используется следующая

Лемма 3. *Пусть $[E]^\alpha_\tau$ и $[E]^\alpha_\mu$, где $\tau \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} t^{\overbrace{1\ldots1}^{i\ \text{раз}}}$, $\mu \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} t^{\overbrace{1\ldots1}^{j\ \text{раз}}}$ $i\geqslant 0$, $j\geqslant 0$, $i\neq j$, — элементарные формулы, не содержащие символа умножения, тогда формула $\neg([E]^\alpha_\tau \& [E]^\alpha_\mu)$ выводима в исчислении P_1.*

2. В связи с теоремой 1, а также используя методы работ [4], [5], можно предложить некоторый специализированный секвенциальный вариант классической арифметики первого порядка.

Введем в рассмотрение исчисление P_1', получающееся из P_1 заменой аксиомы BI аксиомой $\neg(x=0) \supset x=(Pdx)'$, которое получается из аксиомы BI применением сколемовского метода исключения положительных кванторов*. Обозначим через P_2 исчисление, которое получается из P_1' заменой аксиомы 1 аксиомой $Pdx'=x$. Равнообъемность исчислений P_1' и P_2 устанавливается несложными преобразованиями выводов.

Обозначим через P_3 исчисление, получаемое из исчисления предикатов с равенством генценовского типа (см., напр., [4]) путем присоединения следующих постулатов:

1. Правила вида

$$\frac{[\Pi \to \Delta]^\alpha_r}{[\Pi \to \Delta]^\alpha_s}$$ сопряженные (см. [4]) с аксиомами $Pdx'=x$; $x+0=x$;

$$x+y'=(x+y)';\ x+y=y+x;\ (x+y)+z=x+(y+z);\ x\cdot 0=0;\ x\cdot y'=x\cdot y+x.$$

2. $$\frac{(t=0)\,[\Gamma\to\Delta]^{\alpha\beta}_{p_1\,q^+};\ \big(t=(Pdt)'\big)\,[\Gamma\to\Delta]^{\alpha\beta}_{p^+\,q_1}}{[\Gamma\to\Delta]^{\alpha\beta}_{pq}}.$$

где α, β — произвольные свободные переменные, причем если

$$\alpha \neq \beta,\ \text{то}\ p,\ p_1 \in \{0,\ t\};\ q,\ q_1 \in \{t,\ (Pdt)'\};\ p \neq p_1,\ q \neq q_1;\ q^+ \mathrel{\overline{\underline{\circ}}}\, q;\ p^+ \mathrel{\overline{\underline{\circ}}}\, p$$

(где t — произвольный терм); если же $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \beta$, то $p \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} q \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} t$; $p_1 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} 0$; $q_1 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (Pdt)'$; q^+, p^+ — пустые слова.

3. $$\frac{\Gamma\to\Delta\,(t'=0)}{\Gamma\to\Delta}.$$

4. $$\frac{[\Gamma\to\Delta]^\alpha_\rho\,(t+r=t+s);\ (r=s)\,[\Gamma\to\Delta]^\alpha_{\rho_1}}{[\Gamma\to\Delta]^\alpha_\rho},$$

---

* Таким образом, исчисление P_1' является некоторым расширением исчисления P_1, т.е. формула, не содержащая символа предшественника Pd, выводима в P_1 тогда и только тогда, когда она выводима в P_1'.

где ρ, $\rho_1 \in \{r, s\}$; $\rho \neq \rho_1$, r, s, t — произвольные термы.

5. $\Gamma \to \Delta_1 [A]_0^\alpha [A]_t^\alpha \Delta_2$; $\Gamma [A]_b^\alpha \to \Delta_1 [A]_{b'}^\alpha [A]_t^\alpha \Delta_2$.

$$\frac{\text{Формула } A \text{ и переменная в удовл. усл. (*)}}{\Gamma \to \Delta_1 [A]_t^\alpha \Delta_2}.$$

6. $\Gamma \to \Delta\, A$; $A\, \Gamma \to \Delta$.

$$\frac{\text{Формула } A \text{ удовл. усл. (*)}}{\Gamma \to \Delta}.$$

Условие. *Формула A либо содержит кванторы, либо нефиктивные вхождения символа умножения; переменная b не входит в заключение.*

Имеет место следующая

Теорема 2. *Исчисления P_2 и P_3 равнообъемны.*

Литература

1. Shoenfield J. R., Open sentences and the induction axiom Journal Symbolic Logic, 1958, 23, No 1, pp. 7–12.
2. Shepherdson J. S., The rule of induction in the free variables aritmetic based on + and. „Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont“, 1967, No 4, pp. 25–31.
3. С. К. Клини, Введение в математику, М., 1957.
4. М. Г. Рогава, О секвенциальных вариантах прикладных исчислений предикатов. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, М., 1967, 4, 189–200.
5. А. И. Плюшкявичене. Об устранении правил типа сечения из аксиоматических систем Робинсона и Пресбургера. Зап. науч. сем. ЛОМИ (в печати).

13. М. Сапаговас (ИФМ). **Решение уравнения минимальной поверхности в непрямоугольных координатах**

14. И. Уждавинис (ВГУ). **О сходимости методов коллокационного типа для линейных уравнений**

Для интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{1}$$

приближенное решение разыскивается в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k. \qquad 2)$$

Коэффициенты $a_k^{(n)} (k=0, 1, \ldots, n)$ определяются по методам коллокационного типа [2], а именно, из следующих систем уравнений

$$\varphi_n - \lambda A_n z_n = B_n f_n \tag{3}$$

или

$$\psi_n - \lambda\, C_n v_n = D_n g_n, \tag{4}$$

где φ_n, $\mathbf{z}_n$, $\mathbf{f}_n$, ψ_n, $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{g}_n$ — $(n+1)$-мерные векторы-столбцы, компонентами которых являются, соответственно,

$$\varphi_n(x_i^{(n)}),\quad \int_a^b K(x_i^{(n)}, y)\,\varphi_n(y)\,dy,\quad f(x_i^{(n)}),$$

$$\int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} \varphi_n(x)\,dx,\quad \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} \int_a^b K(x, y)\,\varphi_n(y)\,dy\,dx,\quad \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} f(x)\,dx \quad (i=0, 1, \ldots, n).$$

A_n, B_n, C_n и D_n — произвольные матрицы типа $(n+1, n+1)$.

В случае $A_n=B_n=C_n=D_n=E$ (единичная матрица) методы (3) и (4) совпадают, соответственно, с методом коллокации и подобластей.

Во всех теоремах λ не является собственным значением уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1°) $K(x, y)\in C([0, 1]\times[0, 1])$, $f(x)\in C([0, 1])$, $[a, b]=[0,1]$;

2°) $A_n=B_n=\{b_{ij}^{(n)}\}=\left\{\dfrac{n!\,(n-i)^{n-j}\,i^j}{n^n\,(n-j)!\,j!}\right\}$ $(b_{00}=b_{nn}=1)$ $(i, j=0, 1, \ldots, n)$;

3°) $x_i^{(n)}=\dfrac{i}{n}+\dfrac{c_i^{(n)}}{n}$ $\left|\dfrac{c_i^{(n)}}{n}\right|\leqslant\dfrac{\mu(n)}{n}\to 0$ *при* $n\to\infty$ $(i=0, 1, \ldots, n)$.

Тогда при достаточно больших n система уравнений (3) *имеет единственное решение и*

$$\max_{x\in[0,1]} |\varphi^*(x)-\varphi_n(x)|=O\left[\omega_{\varphi^*}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{\mu(n)}{n}\right)\right],$$

где $\varphi^*(x)$ — *точное решение уравнения* (1), *а* ω_{φ^*} — *модуль непрерывности функции* $\varphi^*(x)$.

Следствие. *Когда* $c_i^{(n)}=0$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, *следует результат* [1].

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1° *и*

2°) $C_n=D_n=\{c_{ij}^{(n)}\}=\dfrac{(n+1)!}{j!\,(n-j)!}\displaystyle\int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} x^j(1-x)^{n-j}\,dx$ $(i, j=0, 1, \ldots, n)$;

3°) $x_i^{(n)}=\dfrac{i}{n+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n+1)$.

Тогда при достаточно больших n система уравнений (4) *разрешима и*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |\varphi^*(x)-\psi_n(x)|=O\left[\omega_{\varphi^*}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right],$$

где $\psi_n(x)$ — *приближенное решение, полученное по методу* (4).

Учитывая результат [3], имеем

Теорему 3. *Пусть выполнены условия* 3°, 4° *теоремы* 2 *и* $K(x, y)$ *симметрично и*

$$\int_0^1\int_0^1 K^2(x, y)\,dx\,dy<\infty,\quad f(x)\in L_2(0, 1),\quad [a, b]=[0, 1].$$

Тогда при достаточно больших n метод (4) *дает единственное решение* $\psi_n(x)$ *и*

$$\|\varphi^*-\psi_n\|_{L_2(0,1)}\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Пусть теперь $x_i^{(n)}$ нули ортогональных полиномов на (a, b) с весом $p(x)$ [4].

Теорема 4.

Пусть выполнены условия:

1°. *Ядро $K(x, y)$ симметрично, конечно в каждой точке квадрата $[a, b; a, b]$ и интегрируемо с квадратом; $f(x)$ — конечная на $[a, b]$ и $f(x) \in L_2(a, b)$ 2° $A_n = B_n = E$ (единичная матрица).*

Тогда при больших n система (3) *разрешима и*

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{L_2(a, b)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Рассмотрены методы для двумерных интегральных уравнений, интегральных уравнений Вольтерра и интегро-дифференциальных уравнений, указанных в [2].

Литература

1. М. Ф. Каспшицкая, Н. И. Тукалевская, К вопросу о сходимости метода коллокации, Украинский математический журнал, **19**, № 4 (1967), 48.
2. И. Уждавинис, О некоторых приближенных методах коллокационного типа, Лит. матем. сб., 5, № 4 (1965), 653.
3. P. L. Butzer, Dominated convergence of Kantorovich polynomials in the space *Lp*, Trans. Roy. Soc. Canada. Sect., **III** (3), 46 (1952), 23—27.
4. J. Shohat, On the convergence properties of Lagrange interpolation based on the zeros of orthogonal Tchebycheff polynomials. Annals of Mathematics, **38**, No 4 (1937), 758—769.

15. И. Уждавинис (ВГУ). **О сходимости методов коллокационого типа для нелинейных уравнений**

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 K[x, y, \varphi(y)]\, dy, \tag{1}$$

где функция $K(x, y, u)$ определена и непрерывна в параллелепипеде

$$0 \leqslant x, y \leqslant 1 \quad |u| \leqslant h. \tag{2}$$

Приближенное решение разыскивается в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k. \tag{3}$$

Коэффициенты $a_k^{(n)}$ определяются по методам коллокационного типа [2]

$$\varphi_n = A_n z_n \tag{4}$$

или

$$\psi_n = B_n v_n, \tag{5}$$

где φ_n, ψ_n, z_n, v_n $(n+1)$ - мерные векторы - столбцы, компонентами которых являются, соответственно,

$$\varphi_n(x_i^{(n)}), \quad \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} \varphi_n(x)\, dx, \quad \int_0^1 K\left(x_i^{(n)}, y, \varphi_n(y)\right) dy,$$

$$\int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} \int_0^1 K\left(x, y, \varphi_n(y)\right) dy, \quad (i = 0, 1 \ldots, n),$$

A_n и B_n матрицы типа $(n+1, n+1)$.

На основе общей теории приближенных методов для нелинейных уравнений [1] имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1°) *уравнение* (1) *имеет решение* $\varphi^*(x)$;

2°) *функции* $K(x, y, u)$ *и* $\frac{\partial K(x, y, u)}{\partial u}$ *определены и непрерывны при* $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, $|u-\varphi^*(x)| \leqslant \delta$, *причем линейное однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение* $\varphi(x) \equiv 0$

$$\varphi(x) = \int_0^1 \partial K(x, y, \varphi^*(y)) \,|\, \partial u \, \varphi(y)\, dy;$$

3°) $x_i^{(n)} = \frac{i}{n} + \frac{c_i^{(n)}}{n}$, $\quad \left| \frac{c_i^{(n)}}{n} \right| \leqslant \frac{\mu(n)}{n} \to 0 \quad n \to \infty$,

$$A_n = \{ a_{ij}^{(n)} \} = \frac{n!\,(n-i)^{n-j}\, i^j}{n^n\,(n-j)!\, j!}, \qquad (a_{00} = a_{nn} = 1), \quad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда найдется такое число $\sigma > 0$, *что решение* $\varphi^*(x)$ *интегрального уравнения* (1) *единственно в шаре* $\|\varphi - \varphi^*\| \leqslant \sigma$ *и при достаточно больших* n *метод коллокационного типа* (4) *дает в этом шаре единственное приближенное решение* $\varphi_n^*(x)$ *и*

$$\max_{x \in [0, 1]} |\varphi^*(x) - \varphi_n^*(x)| = O\left[\omega_{\varphi^*}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{\mu(n)}{n}\right)\right].$$

Следствие. *Для равноотстоящих узлов* ($c_i^{(n)} = 0$) *порядок* $O\,[\omega_{\varphi^*}(n^{-\frac{1}{2}})]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:* 1° и 2°.

3°) $x_i^{(n)} = \frac{i}{n+1}$, $\quad B_n = \{ b_{ij}^{(n)} \} = \frac{(n+1)!}{j!\,(n-j)!} \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} x^j (1-x)^{n-j}\, dx \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$

Тогда при достаточно больших n *метод* (5) *дает единственное приближенное решение* $\psi_n^*(x)$ *и*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\varphi^*(x) - \psi_n^*(x)| = O\left(\omega_{\varphi^*}\left(\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}\right)\right].$$

Рассмотрены указанные методы для нелинейных уравнений типа

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})$$

и

$$\Delta u = g\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u\right) \qquad \text{для узлов } 3°.$$

Литература

1. Г. Вайникко, О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений, Ж. выч. мат. и мат. физики, 6, № 1 (1966) 35.
2. И. Уждавинис, О некоторых приближенных методах коллокационного типа, Лит. матем. сб. V, № 4 (1965), 653.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. А. Бикялис (ВГУ). **О необходимых и достаточных условиях для оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме**

Пусть $P_n(A)$ – распределение суммы $\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$ независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ евклидова пространства R^k. Предположим, что ξ_1 имеет равные нулю математические ожидания и невырожденную матрицу V вторых моментов.

Обозначим: $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{t}$ из R^k; $|\mathbf{x}|$ – длина вектора $\mathbf{x}$; $\mathbf{0}$ – нулевой вектор в R^k; $P\{\ldots\}$ – вероятность указанного в скобках события; $\Phi(A)$ – распределение k-мерного нормального вектора η с параметрами $(\mathbf{0};\ V)$.

Методом характеристических функций доказаны следующие теоремы (см. [1]).

Теорема 1. *Для того чтобы при $n\to\infty$ имело место соотношение*

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}|P_n(A)-\Phi(A)|-O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right)$$

необходимо и достаточно чтобы было выполнено условие

1)

$$\sup_{y\in R^1}|P\{(\mathbf{S}_n,\ \mathbf{t})<y\}-P\{(\eta,\ \mathbf{t})<y\}|=O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right)$$

для всех $\mathbf{t}\in\{\mathbf{t}:|\mathbf{t}|=1\}$. *Здесь* $0<\delta\leqslant1$ *и* $\mathfrak{A}$ *– класс всех выпуклых измеримых множеств в* R^k.

Теорема 2. *Для того чтобы при $n\to\infty$ имело место соотношение*

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}|P_n(A)-\Phi(A)|=O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие 1) *теоремы* 1 *и условие*

2) *существует целое число n_0 такое, что распределение $P_{n_0}(A)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту.*

Здесь $0<\delta\leqslant1$ *и* $\mathfrak{N}$ *– класс борелевских множеств в* R^k.

Используя результаты И. А. Ибрагимова (см. [2] теоремы 3.1 и 3.2), легко показать, что в случае $0<\delta<1$ условие 1) эквиваленто условию

3)

$$\int\limits_{|x_1|>z}\ldots\int\limits_{|x_k|>z}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^2\,dF(\mathbf{x})=O(z^{-\delta}),\qquad z\to\infty,$$

для всех $\mathbf{t}\in\{\mathbf{t}:|\mathbf{t}|=1\}$, а в случае $\delta=1$ условие 1) эквивалентно двум условиям: условию 3) и условию

4)

$$\int\limits_{-z}^{z}\ldots\int\limits_{-z}^{z}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^3\,dF(\mathbf{x})=O(1),\qquad z\to\infty$$

для всех $\mathbf{t}\in\{\mathbf{t}:|\mathbf{t}|=1\}$. Здесь $F(\mathbf{x})$ – функция распределения случайного вектора ξ_1.

Литература

1. А. Бикялис, О центральной предельной теореме в R^k. I, Лит. матем. сб., XI, № 2 (1971).
2. И. А. Ибрагимов, О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением, Теор. вер. и прим., XI, вып. 4 (1966), 632–655.

2. Г.-Ю. Аляшкявичюс (ИФМ). **Распределение максимума для марковских процессов с дискретным временем**

Пусть $(\xi_n)_0^\infty$ — простой неоднородный марковский процесс с дискретным временем, с фазовыми пространствами $(\Omega_n, \mathfrak{F}_n)$, переходными вероятностями $p_n(\omega, A)$, $\omega \in \Omega_{n-1}$, $A \in \mathfrak{F}_n$, и коэффициентами эргодичности α_n. Пусть $(X_n)_0^\infty$ — последовательность условно независимых величин, заданных на порцессе $(\xi_n)_0^\infty$ с помощью функций распределения

$$F_n(\omega, \tilde{\omega}, x),\ \omega \in \Omega_{n-1},\ \tilde{\omega} \in \Omega_n,\ -\infty < x < \infty.$$

Решается следующая проблема: *найти, в каких условиях существуют последовательности констант A_n, B_n, C_n и собственная функция распределения $F(x)$, такие, что последовательность функций распределения*

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant m \leqslant n} \Sigma_1^m X_j < A_n + xB_n\}$$

слабо сходилась к предельному закону $F(x)$ и имела место оценка скорости сходимости

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| < \frac{C_n}{B_n}. \tag{1}$$

Доказаны следующие две предельные теоремы для случайных величин X_n с конечным третьим моментом

$$\beta_n = \sup_{\omega \in \Omega_{n-1}} \mathbf{E}_\omega |X_n|^3 < \infty, \quad \text{п. н.}$$

Обозначим $\alpha^{(n)} = \min\limits_{1 \leqslant m \leqslant n} \alpha_m$; $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_\omega$, $\mathbf{E}_{\omega\tilde{\omega}}$ — знаки абсолютного и условных математических ожиданий при фиксированном прошлом процесса $(\xi_n)_0^\infty$; $\mathbf{D}$ — знак дисперсии.

Теорема 1. *Если*

1) $\mathbf{E}_{\xi_{n-1}\xi_n}(X_n) = 0$ *п. н.*,

2) $B_n^2 = \mathbf{D}\,\Sigma_1^n X_j \to \infty$,

3) $\dfrac{C_n}{B_n} = \dfrac{C}{\alpha^{(n)} B_n^3} \Sigma_1^n \beta_j \to 0$,

то $A_n = 0$ и неравенство (1) *справедливо для закона*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & (x \leqslant 0), \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, & (x > 0). \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2. *Если*

1) $A_n = \max\limits_{0 \leqslant m \leqslant n} \mathbf{E}\,\Sigma_1^m X_j \neq 0$, *но* $\dfrac{A_n}{B_n} \to 0$,

2) $B_n^2 = \mathbf{D}\,\Sigma_1^n X_j \to \infty$,

3) $\dfrac{C_n}{B_n} = \dfrac{C}{\alpha^{(n)} B_n^3} \Sigma_1^n \beta_j \log(\alpha^{(n)} B_n) \to 0$,

то неравенство (1) *справедливо для закона* (2). *Если же в условии* 1) $\dfrac{A_n}{B_n} \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то неравенство* (1) *справедливо для нормального предельного закона*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \quad (-\infty < x < \infty).$$

3. Б. Григелионис (ИФМ). **О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам**

4. А. Аляшкявичене (ИФМ). **Некоторые предельные теоремы для случайного блуждания**

Пусть имеется последовательность ξ_i, $i=1, 2, \ldots$, независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Не нарушая общности, можем предполагать, что ξ_i не равны константе с вероятностью единица.

Обозначим

$$M\xi_i=a, \quad \sigma^2=D\xi_i, \quad c_3=M\,|\,\xi_i-a\,|^3,$$

$$S_0=0, \quad S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \quad n=1, 2, \ldots, \quad \bar{S}_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i,$$

$$F_n(x)=P\{S_n<x\}, \quad \bar{F}_n(x)=P\{\bar{S}_n<x\},$$

$$N_x=\max\{n: \bar{S}_n<x\}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $a>0$ *и* $c_3<\infty$, *то при* $n\to\infty$

$$\sqrt{n}\,P\{N_x=n\}=\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-na)^2}{2\sigma^2 n}}\left(1+O\left(\frac{|x-na|}{\sqrt{n}}\right)\right)+O\left(\frac{c_3^2}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по x, $-\infty<x<\infty$.

Как следствие теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $a>0$ *и* $c_3<\infty$, *то при* $x\to\infty$

$$\sqrt{x}\,P\{N_x=n\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/a^3}}\,e^{-\frac{\left(n-\frac{x}{a}\right)^2}{2x\sigma^2/a^3}}\left(1+O\left(\frac{\left|n-\frac{x}{a}\right|^3}{x^2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

равномерно по n, $0\leqslant n<\infty$,

Теорема 3. *Если* $a=0$ *и* $c_3<\infty$, *то*

$$P\{N_x=n\}=\frac{x}{n}\;\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}}}{\sigma\sqrt{2\pi n}}+O\left(\frac{x}{n^2}+\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

При доказательстве теоремы 1 мы пользовались следующей автором доказанной теоремой.

Теорема 4. *Если* $a>0$ *и* $c_3<\infty$, *то существует абсолютная постоянная* L, *такая что*

$$|\,\bar{F}_n(x\sigma\sqrt{n}+an)-\Phi(x)\,|<\frac{Lc_3^2}{\sqrt{n}(1+x^2)},$$

где $\Phi(x)$ — *нормальное распределение.*

5. Б. Каминскене (ИФМ). **Некоторые оценки для функции восстановления**

Пусть имеется последовательность

$$\xi_1, \xi_2, \ldots$$

независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих лишь положительные целые значения k $(k=1, 2, \ldots)$ с вероятностями

$$P_k=P\{\xi_1=k\}.$$

Допустим, что функция распределения $F(x)=P\{\xi_1<x\}$ для всех $x>0$ удовлетворяет условию

$$1-F(x)\leqslant Ke^{-\lambda t}, \tag{1}$$

где $0\leqslant K<\infty$, $\lambda>0$ — константы.

Обозначим

$$\mu_1=\mathbf{M}\xi_1\neq 0,\ \mu_2=\mathbf{M}\xi_1<\infty$$

и

$$S_m=\sum_{i=1}^{m}\xi_i,\quad m=1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Случайный процесс $N(t)=\max\{m : S_m<t\}$ называется процессом восстановления, а $H(t)=M\,N(t)$ — функцией восстановления.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (1). *Тогда существуют константы* $\lambda_1>0$ *и* $0\leqslant K_1<\infty$, *такие что при* $t\geqslant t_0>0$

$$\left|H(t)-\frac{t}{\mu_1}\quad\frac{\mu_2-2\mu_1^2+\mu_1}{2\mu_1^2}\right|\leqslant K_1\,e^{-\lambda_1 t}.$$

Теорема 2. *Если выполнено условие* (1), *то для каждого* $a>0$ *существуют константы* $\lambda_2>0$ *и* $0\leqslant K_2<\infty$, *такие что при* $t\geqslant t_0>0$

$$\left|\frac{H(t+a)-H(t)}{a}-\frac{1}{\mu_1}\right|\leqslant K_2\,e^{-\lambda_2 t}.$$

Литература

1. W. Feller, Fluctuation theory of Recurrent Events, Frans. Amer. Math. Soc., 67, 98—119.
2. J. Teugels, Exponential decay in renewal theorems, Bulletin de sc. Math. de Belgigue, **XIX**, 259—276.
3. А. Н. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.-Л., Гостехиздат, 1950.

6. П. Сурвила (ВГПИ). **О предельном распределении одного функционала от последовательности независимых случайных величин**

7. А. Темпельман (ИФМ). **Эргодические теоремы для общих динамических систем**

8. Р. Бенткус (ИФМ). **О сходимости случайных ломаных в многомерном случае**

Пусть $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$ — независимые одинаково распределенные k-мерные случайные величины, такие, что

$$\mathbf{E}\xi_1=O,\quad \operatorname{Cov}\xi_1=\{\mathbf{E}\xi_1^{(i)}\,\xi_1^{(j)}\}_{i=\overline{1,k}}^{j=\overline{1,k}}=B\,.$$

Обозначим

$$S_0\equiv O,\quad S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,;$$

$$\xi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\ S_i+\frac{t-\dfrac{i}{n}}{\dfrac{1}{n}}\cdot\frac{\xi_{i+1}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\ [S_i+(tn-i)\,\xi_{i+1}]$$

при $\frac{i}{n} \leqslant t \leqslant \frac{i+1}{n}$, где $i=0, 1, \ldots, n-1$, $n=1, 2, \ldots$ Тогда $\xi_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — k-мерный случайный процесс, реализациями которого являются ломаные в $(k+1)$-мерном пространстве R^{k+1} с вершинами в точках

$$\left(\frac{i}{n}, \frac{S_i^{(1)}}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{S_i^{(k)}}{\sqrt{n}}\right), \quad i=0, 1, \ldots, n.$$

Через $C_{[0,1]}$ обозначим множество всех непрерывных отображений интервала $[0, 1]$ в R^k. Пусть, далее,

$$d(x, y) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| x(t) - y(t) \|, \quad \text{где} \quad \| a \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} | a^{(i)} |,$$

— метрика в $C_{[0,1]}$. Тогда $C_{[0,1]}$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Через $\mathscr{B}$ обозначим борелевскую σ-алгебру в пространстве $C_{[0,1]}$. Очевидно, что почти все реализации случайного процесса $\xi_n(t)$ принадлежат $C_{[0,1]}$. Можно показать, что если почти все реализации некоторого случайного процесса принадлежат $C_{[0,1]}$, то конечномерные распределения этого процесса однозначно определяют вероятностную меру в $\mathscr{B}$. Следовательно, $\xi_n(t)$ порождает вероятностную меру P_n в $\mathscr{B}$, $n=1, 2, \ldots$.

Пусть $\eta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — k-мерный гауссовский случайный процесс, такой, что

$$\eta(0) = O, \ \mathbf{E}\eta(t) \equiv O,$$
$$\mathbf{E}\eta(t_1)\eta'(t_2) = \min(t_1, t_2) \cdot B.$$

Нетрудно убедиться, что почти все реализации $\eta(t)$ принадлежат $C_{[0,1]}$. Следовательно, $\eta(t)$ порождает вероятностную меру P в $\mathscr{B}$.

Теорема 1. *Конечномерные распределения случайного процесса $\xi_n(t)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям случайного процесса $\eta(t)$, $n \to \infty$.*

2. *Вероятностные меры P_n слабо сходятся к вероятностной мере P, $n \to \infty$.*

Лемма 1. *Пусть Q_n, $n \geqslant 1$, и Q — вероятностные меры в $\mathscr{B}$, порожденные случайными процессами $\gamma_n(t)$, $n \geqslant 1$, и $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, почти все реализации которых непрерывны. Тогда Q_n слабо сходятся к Q тогда и только тогда, когда:*

1) *конечномерные распределения $\gamma_n(t)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям $\gamma(t)$;*

2) *последовательность Q_n, $n \geqslant 1$ слабо компактна.*

Лемма 2. *Пусть C — декартово произведение полных сепарабельных метрических пространств C_i, $i=1, 2, \ldots, k$, с метрикой*

$$d(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} d(x^{(i)}, y^{(i)}),$$

где $d(x^{(i)}, y^{(i)})$ — метрика в пространстве C_i. Пусть, далее, $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра в C, и P_n, $n \geqslant 1$, — последовательность вероятностных мер в $\mathscr{B}$. Тогда P_n, $n \geqslant 1$, слабо компактна тогда и только тогда, когда слабо компактны последовательности маргинальных мер $P_n^{(i)}$, $n \geqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Пользуясь случаем, благодарю своего научного руководителя В. А. Статулявичуса за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теор. вероятн. и ее примен., I (1956), 177—238.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, „Наука", М., 1965.

9. А. Стейшюнас (ИФМ). **Обобщение формулы Спицера**

10. А. Бакштис (ШФ. КПИ). **Сопровождающие законы распределения для произведений независимых случайных величин**

Как известно из теории суммирования независимых случайных величин, основное значение для решения центральной предельной проблемы имеют сопровождающие законы. Строение этих законов для произведений

$$\zeta_n = a_n \xi_{n1} \xi_{n2} \dots \xi_{nk_n}, \quad a_n > 0 \tag{1}$$

вскрывается следующей теоремой.

Пусть независимые случайные величины ξ_{nk} $(n=1, 2, \dots ; k=1, 2, \dots, k_n)$ являются M-предельно пренебрегаемыми: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_k \mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2 > \varepsilon\} = 0. \tag{2}$$

Через $_n w_j(t), j=0,1$ обозначим характеристическое преобразование (х. п.) произведения (1):

$$_n w_j(t) = \mathbf{M} |\zeta_n|^{it} \operatorname{sgn}^j \zeta_n, \qquad j=0,\ 1,$$

причем считается $0^{it}=0$ для всех вещественных t. Далее обозначим:

$$c_{nk}^{+} = \mathbf{P}\{\xi_{nk} > 0\}, \quad c_{nk}^{-} = \mathbf{P}\{\xi_{nk} < 0\};$$

$$\xi'_{nk} = \begin{cases} \xi_{nk}, & \text{если } c_{nk}^{+} \geqslant c_{nk}^{-}, \\ -\xi_{nk}, & \text{если } c_{nk}^{+} < c_{nk}^{-}; \end{cases}$$

$$F'_{nk}(x \mid \xi'_{nk} \neq 0) = \mathbf{P}\{\xi'_{nk} < x \mid \xi'_{nk} \neq 0\}.$$

Для любого $c > 1$ положим:

$$\beta_{nk} = \int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c} \ln|x|\, d\mathbf{P}\{\xi_{nk} < x \mid \xi_{nk} \neq 0\}.$$

Теорема. *Если независимые случайные величины ξ_{nk} — M-предельно пренебрегаемы, то х. п. $_n w_j(t)$, $j=0, 1$, при некотором подборе постоянных $a_n > 0$, когда $n \to \infty$, сходятся к предельному х. п. тогда и только тогда, когда к некоторому х. п. сходятся х. п. вида*

$$_n \tilde{w}_0(t) = a_n^{it} \prod_k (c_{nk}^{+} + c_{nk}^{-}) f_n^{(1)}(t) f_n^{(2)}(t),$$

$$_n \tilde{w}_1(t) = a_n^{it} \prod_k (c_{nk}^{+} - c_{nk}^{-}) \frac{f_n^{(1)}(t)}{f_n^{(2)}(t)},$$

где

$$f_n^{(1)}(t) = \exp\left\{ it \sum_k \beta_{nk} + \sum_k \int\limits_0^{+\infty} (x^{it}-1)\, dF'_{nk}(x e^{\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0), \right.$$

$$f_n^{(2)}(t) = \exp\left\{ \sum_k \int\limits_{-\infty}^{0} (|x|^{it}-1)\, dF'_{nk}(x e^{\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0). \right.$$

В случае сходимости обе предельные х. п. совпадают.

Исходя из этой теоремы, можно строить центральную предельную теорему для произведений (1), (2). Поскольку х. п. сопровождающего закона зависит от двух характеристических функций $f_n^{(\nu)}(t)$, $\nu=1, 2$, то его можно сформулировать в нескольких вариантах.

11. Р. Уждавинис (ВГУ). **К вопросу о распределении значений целозначных аддитивных арифметических функций**

Пусть $f(m)$ — аддитивная арифметическая функция, принимающая лишь целые значения и удовлетворяющая условию $f(p)=0$ для всех простых p; $R(m)=a_0m^2+a_1m+a_2>0$ $(m=1, 2, \ldots)$ — примитивный полином с целыми коэффициентами, для которого сравнение $R(m)\equiv 0 \pmod{p^2}$ неразрешимо при любом простом p/D (D — дискриминант полинома); $L_R(a)$ — число классов вычетов, удовлетворяющих сравнению $R(m)\equiv 0 \pmod{a}$. Доказывается, что для любого целого q

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{m\leqslant x\\ f(R(m))=q}} 1\equiv \nu_q^{(R)}(x)=d_q^{(R)}+O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)$$

равномерно по q, где $d_q^{(R)}=\lim\limits_{x\to\infty}\nu_q^{(R)}(x)$ можно определить из соотношения

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} d_q^{(R)}e^{itq}=\prod_{p\nmid D}\left\{1-\frac{L_R(p)}{p}+L_R(p)\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}+\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}\right)\right\}, \tag{1}$$

причем ряд и произведение сходятся для всех вещественных t.

В частном случае для функции $f(m)=\Omega(m)-\omega(m)$ ($\omega(m)$ — число различных простых делителей m; $\Omega(m)$ — число всех простых делителей m, считая и их кратность) и полинома $R(m)=m^2+1$ из (1) следует

$$\sum_{q=0}^{\infty} d_q^{(R)}e^{itq}=\prod_{p\equiv 1 \pmod 4}\left\{1-\frac{2}{p}+2\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p-e^{it}}\right\},$$

откуда легко можно подсчитать $d_0^{(R)}$, $d_1^{(R)}$, ...

Приведенные соотношения являются аналогом одной локальной теоремы ([1], стр. 104).

Литература

1. И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.

12. Г. Мисявичюс (ВГУ). **Предельные теоремы для сумм функций от элементов цепных дробей**

Будем пользоваться обозначениями, принятыми в [2]. Пусть, далее, T означает преобразование отрезка (0, 1) в себя, задаваемое формулой

$$Tt=\left\{\frac{1}{t}\right\},$$

что эквивалентно

$$Tt=T[a_1(t),\ a_2(t)\ldots]=[a_2(t),\ a_3(t)\ldots].$$

Пусть $f(t)$ — вещественная функция. Рассмотрим сумму $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k t)$. И. А. Ибрагимовым выяснены условия, при которых значения этой суммы распределены асимптотически нормально. В настоящей работе получены более точные, чем в [2], оценки остаточного члена в предельном соотношении, а также получены асимптотические разложения для функций распределения сумм S_n. Сходным проблемам посвящены исследования Д. А. Москвина (работы находятся в печати в журнале „Теория вероятностей и ее применения“).

Теорема 1. *Пусть функция* $f(t)$ *с* $\int\limits_0^1 f(t)\,dt=0$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\int\limits_0^1 |f(t)|^S \mathrm{dt}<\infty$,

2) *существуют константы* $A, \alpha>0$ *такие, что*

3)
$$\left(\int\limits_0^1 |f(t+h)-f(t)|^S \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{S}}\leqslant Ah^{\alpha},$$
$$DS_n\to\infty.$$

Тогда

$$|F_n(x)-G(x)|\leqslant\frac{\ln^{\frac{S-2}{S-1}}}{\sqrt{n}},$$

где

$$F_n(x)=\operatorname*{mes}_{t\in 0,\,1}\left\{t:\ \frac{S_n(t)}{\sqrt{DS_n}}<x\right\},\quad G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Теорема 2. *Пусть для функции* $f(t)$ *выполнены все условия теоремы* 1. *Пусть, кроме того, мера множества значений суммы* $S_{\ln n}(t)$ *больше нуля. Тогда*

$$F_n(x)=G(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{S-3} Q_{\nu n}(x)\,L_{S_n}^{\frac{\nu-2}{S-2}}+\Theta L_{S_n}\ln^{\frac{S}{2}}\left(1+L_{S_n}^{-1}\right).$$

Здесь

$$L_{S_n}=\frac{\gamma\ln n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^1 |f(T^k t)|^S\,dt}{\left(\sqrt{DS_n}\right)^S},$$

$Q_{\nu_n}(x)$ — *полиномы с равномерно ограниченными коэффициентами.*

Литература

1. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, I–II, Лит. матем. сб., **IX**, 2–3 (1969).
2. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, Москва, 1961.
3. Г. А. Мисявичус, Оценка остаточного члена в предельных теоремах для функций от элементов цепных дробей, Лит. матем. сб., **X**, 2 (1970).

13. А. Матуляускас (ВГУ). **Теоремы для плотности ζ-функции Гекке в квадратичном поле действительных чисел**

14. А. Рауделюнас (ВГУ). **Об оценке остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова**

Пусть $\xi(t)$, $t=0, 1, 2, \ldots$ — стационарный марковский процесс с дискретным временем, принимающий значения из измеримого пространства $(X, \mathscr{F})$, с вероятностью перехода $\mathbf{P}(x, A)$, $x\in X$, $A\in\mathscr{F}$, удовлетворяющей условию

$$\sup_{\substack{x,\,y\in X\\ A\in F}} |\mathbf{P}(x, A)-\mathbf{P}(y, A)|=1-\alpha<1$$

и начальным распределением вероятностей $\mathbf{P}_0(A)$, $A \in \mathcal{F}$. Будем рассматривать последовательность

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \tag{1}$$

k-мерных случайных величин, связанных в цепь Маркова $\xi(t)$, т.е. $X_t = f(\xi(t))$, $t=1, 2, \ldots$, где $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$ – некоторая определенная на X функция со значениями из k-мерного пространства R^k и $\mathcal{F}$ измерима.

Предположим, что $\mathbf{M} X_1 = 0$ и

$$\beta_j^3 = \sup_x \int_X |f_j(y)|^3 \mathbf{P}(x, dy) < \infty, \quad j=1, 2, \ldots, k.$$

Положим

$$\sigma_j^2 = \mathbf{D} X_1^{(j)} + 2 \sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{M} X_1^{(j)} X_i^{(j)}, \quad j=1, 2, \ldots, k,$$

где $X_i^{(j)}$ – означает j-ю компоненту вектора X_i. Пусть P_n – распределение нормированной суммы

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$$

и Φ_P – нормальное распределение с теми же первыми и вторыми моментами. Пусть $\rho_1(P, Q)$ – расстояние между распределениями P и Q определенное как

$$\rho_1(P, Q) = \sup_{x_1, \ldots, x_k} |F_P(x_1, \ldots, x_k) - F_Q(x_1, \ldots, x_k)|,$$

где F_P и F_Q распределений P и Q, соответствующие функции распределения и

$$\rho_2(P, Q) = \sup |P(A) - Q(A)|,$$

где верхняя грань берется по всем выпуклым множествам A из R^k.

Теорема 1. *При $k=2$ имеет место оценка*

$$\rho_1(P_n, \Phi_P) \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}\,\alpha^3} \left(\frac{\beta_1^3}{\sigma_1^3} + \frac{\beta_2^3}{\sigma_2^3} \right) \cdot \frac{1}{1-\rho^2}, \tag{2}$$

где C – абсолютная константа и

$$\rho = \sup_x \left| \int_X f_1(y) f_2(y) \mathbf{P}(x, dy) \right|.$$

Теорема 2. *Имеет место оценка*

$$\rho_2(P_n, \Phi_P) \leqslant \frac{C_1 k^3 \max\left(\ln T, (\ln T)^{\frac{k-1}{4}}\right)}{\alpha^3 T}, \tag{3}$$

где C_1 – абсолютная постоянная,

$$T = \frac{\sqrt{n}}{4\beta^3} \lambda_{\min}^{3/2},$$

$$\beta^3 = \sup_x \int_X |f(y)|^3 \mathbf{P}(x, dy) \text{ и } \lambda_{\min} = \inf_x \lambda_{\min}(x),$$

где $\lambda_{\min}(x)$ — *минимальное собственное число матрицы*

$$\| b_{ij}(x) \|, \quad i, j=1, 2, \ldots, k, \quad b_{ij}(x)=\int\limits_X f_i(y) f_j(y) \mathbf{P}(x, dy).$$

Полученные теоремы обобщают соответствующие оценки С. М. Садиковой [1] и В. В. Сазонова [2], полученные для независимых случайных величин на случай величин, связанных в цепь Маркова.

Литература

1. С. М. Садикова, О многомерной центральной предельной теореме, Теор. вероят. и ее прим., **XIII**, 1 (1968).
2. V. V. Sazonov, On the multi-dimensional central limit theorem, Sankhya. Ser A, **30**, part 2 (1968).

15. Г. Ясюнас (ВГУ). **Об остаточном члене в многомерной центарльной теореме**

Рассмотрим остаточный член в центральной предельной теореме для последовательности независимых k-мерных случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ евклидова пространства R^k.

Пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{t} \in R^k$; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор; $\mathbf{S}_n = \sum_{j=i}^{n} \xi_j$; $F_j(\mathbf{x})$ — функция распределения векторов ξ_j, $(j=1, 2, \ldots, n)$; $\mathfrak{a}$ — класс выпуклых борелевских множеств A в R^k.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть для некоторой последовательности положительно определенных и симметрических матриц* $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ *порядка* $k \times k$ *и для любого* $\varepsilon>0$ *выполняются условия*:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{(\mathbf{x} V_n^{-1}, \mathbf{x})>\varepsilon} dF_j(\mathbf{x})=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \sum_{j=1}^{n} \left| \int\limits_{(\mathbf{x} V_n^{-1}, \mathbf{x})\leq\varepsilon} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\sqrt{(\mathbf{t} V_n, \mathbf{t})}} dF_j(\mathbf{x}) \right|=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \left| \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{(\mathbf{x} V_n^{-1}, \mathbf{x})\leq\varepsilon} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})^2}{(\mathbf{t} V_n, \mathbf{t})} dF_j(\mathbf{x})-1 \right|=0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\mathbf{t}|=1} |P\{\mathbf{S}_n \in A\}-\Phi_{0, V_n}(A)|=0.$$

Здесь $\Phi_{0,V_n}(A)$ *k-мерное нормальное распределение с параметрами* $(\mathbf{0}, V_n)$.

Теорема 2. *Пусть имеем положительно определенную симметрическую матрицу* V_n *порядка* $k \times k$.

Тогда существует постоянная $C(k)$, зависящая только от k, такая, что

$$\sup_{A\in\mathfrak{a}} |P\{\mathbf{S}_n\in A\}-\Phi_{0,\,V_n}(A)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{(\mathbf{x}V_n^{-1},\,\mathbf{x})>\varepsilon} dF_j(\mathbf{x})+$$

$$+C(k)\left\{\sup_{|\mathbf{t}|=1}\sum_{j=1}^{n}\left|\int\limits_{(\mathbf{x}V_n^{-1},\,\mathbf{x})\leqslant\varepsilon}\frac{(\mathbf{x},\,\mathbf{t})}{\sqrt{(\mathbf{t}V_n,\,\mathbf{t})}}\,dF_j(\mathbf{x})\right|+\right.$$

$$+\sup_{|\mathbf{t}|=1}\left|\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{(\mathbf{x}V_n^{-1},\,\mathbf{x})\leqslant\varepsilon}\frac{(\mathbf{x},\,\mathbf{t})^2}{(\mathbf{t}V_n,\,\mathbf{t})}\,dF_j(\mathbf{x})-1\right|+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{(\mathbf{x}V_n^{-1},\,\mathbf{x})\leqslant\varepsilon}(\mathbf{x}V_n^{-1},\,\mathbf{x})^{\frac{3}{2}}\,dF_j(\mathbf{x})\right\}.$$

Теорема 1 является многомерным аналогом известной теоремы В. Феллера.

16. А. Кароблис (ВГУ). **О локальной предельной теореме для сумм независимых решетчатых случайных векторов в R^k**

Рассматривается последовательность независимых k-мерных случайных векторов ξ_1, ξ_2, …. ξ_n евклидова пространства R^k, которые могут принимать значения только из k-мерной решетки $L=\{\mathbf{a}+\nu H'\}$, где $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ постояный вектор, $\nu=(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; H' — невырожденная матрица порядка $k\times k$. Предположим, что случайные векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют равные нулю математические ожидания.

Обозначим: $(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ — скалярное произведение k-мерных векторов

$$\xi_j=(\xi_{1j}, \xi_{2j}, \ldots, \xi_{kj});\quad \sigma_i^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\xi_{ij}^2,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k;$$

$\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ — вектор стандартов; $\Theta=(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ — случайный вектор с функцией распределения $F(\mathbf{x})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}F_j(\mathbf{x})$, где $F_j(\mathbf{x})$ — функция распределения случайного вектора $\frac{\xi_j}{\sigma}\left(\frac{\xi_{1j}}{\sigma_1}, \frac{\xi_{2j}}{\sigma_2}, \ldots, \frac{\xi_{kj}}{\sigma_k}\right)$; V — корреляционная матрица случайного вектора Θ; $\beta_2=M[(\Theta V^{-1}\Theta')^{\frac{r}{2}}]$; $\tilde{\xi}_j$ — симметризованный случайный вектор с функцией распределения

$$F_{\tilde{\xi}_j}(\mathbf{x})=\int\limits_{R^k}F_{\xi_j}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,dF_{\xi_j}(\mathbf{y});\quad \mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j}{\sigma}.$$

Теорема. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют конечные моменты s-го порядка ($s\geqslant 3$) и матрица V — невырожденная, то при любом*

$$\tau\geqslant\frac{8\pi\sqrt{k}\,\beta_3}{h\sqrt{n}}$$

имеет место неравенство

$$\left| \frac{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k \sqrt{n}^k}{h} P\{\mathbf{S}_n=\mathbf{x}\} - \sum_{j=0}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\varphi)(\mathbf{x}) \right| \leqslant \frac{C(s, \mathbf{k})\beta_s}{\sqrt{|V|}\, n^{\frac{s-2}{2}}} +$$

$$+\frac{(2\pi)^k \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k \sqrt{n}^k}{h} \exp\left\{-\min_{\mathbf{m}/q} \frac{1}{q^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{-\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}} r^2 P\left\{\left(\mathbf{m}, \tilde{\xi}_j (H')^{-1}\right)=\right.\right.$$

$$\left.\left.=r \pmod q, \left|\frac{\xi_j}{\sigma}(H')^{-1}\right| \leqslant \frac{\tau^{\frac{1}{k}} \sqrt{n}}{2\sqrt{k}}\right\}\right\}.$$

Здесь q — целое положительное число, а минимум берется по векторам

$$\frac{\mathbf{m}}{q}=\left(\frac{m_1}{q}, \frac{m_2}{q}, \ldots, \frac{m_k}{q}\right)$$

с несократимыми координатами $(m_i, q)=1$ *при*

$$1<q\leqslant\tau; \quad \mathbf{x}=\frac{\mathbf{a}n+\nu H'}{\sigma\sqrt{n}};$$

H^{-1} — *обратная матрица* H; $h=|\det H|$; $P_j(-\varphi)(\mathbf{x})$ — *известные интегралы*; $|V|$ — *определитель матрицы* V; $C(s, k)$ — *зависит только от* s *и* k.

Следует отметить, что теорема содержит в себе теорему 2 А. Бикялиса [1] и при $k=1$ из нее следует теорема 2 А. Миталаускаса и В. Статулявичуса [2].

Литература

1. А. Бикялис, Неравенства для многомерных характеристических функций, Лит. матем. сб., X, № 1 (1970), 5–11.
2. А. Миталаускас, В. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин, Лит. матем. сб., VI, № 4 (1966), 569–583.

17. А. Жемайтис (ВГУ). **Многомерная локальная предельная теорема для больших уклонений**

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \tag{1}$$

последовательность независимых k-мерных случайных векторов евклидового пространства R^k с функциями распределения $F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{x})$ и характеристическими функциями $v_1(\mathbf{t}), \ldots, v_n(\mathbf{t})$. Предположим, что случайные векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют равные нулю математические ожидания.

Обозначим: $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_k)$ и $\mathbf{t}=(t_1, \ldots, t_k)$ $|\mathbf{x}|$ — длина вектора $\mathbf{x}$; Θ_n — случайный вектор с функцией распределения

$$F^{(n)}(\mathbf{x})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x}).$$

Доказана теорема о больших уклонениях типа Линника—Петрова для плотностей $p_n(\mathbf{x})$ сумм

$$\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть для последовательности* (1) *существуют числа* C_1, C_2 *и*

$$\alpha \left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$$

такие, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M\left[\exp\left\{|\left(\Theta_n, \mathbf{h}\right)|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right\}\right]\leqslant C_0<\infty$$

для $|\mathbf{h}|\leqslant 1$;

2)

$$\varliminf_{n\to\infty} \inf_{|\mathbf{t}|=1} M\left[(\mathbf{t}, \Theta_n)^2\right]\geqslant C_1>0;$$

3) *всякому* $\varepsilon>0$ *отвечает такое* $\delta>0$, *что*

$$\int\limits_{M[(\mathbf{t}, \Theta_n)^2]>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |v_j(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}=O(e^{-\delta n^{2\alpha}}), \quad n\to\infty.$$

Тогда при всех достаточно больших n существует ограниченная плотность вектора $\mathbf{S}_n$ *и выполняется соотношение*

$$\frac{p_n(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})}=\exp\left\{n\sum_{j=3}^{s+3} Q_j\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left(1+O\left(\frac{|\mathbf{x}|+1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

при

$$\mathbf{x}\in\left\{\mathbf{x}:-\frac{n^{\alpha}}{\rho(n)}\leqslant x_j\leqslant\frac{n^{\alpha}}{\rho(n)},\ j=1, 2, \ldots, k\right\}.$$

Здесь $\varphi(\mathbf{x})$ — *плотность k-мерного нормального распределения с параметрами* $(\mathbf{0}, V_n)$, *где* V_n — *матрица вторых моментов случайного вектора* Θ_n; $\rho(n)\to+\infty$ *при* $n\to\infty$; s — *целое число, определяемое для каждого α из неравенства*

$$\frac{1}{2}\ \frac{s}{s+2}<\alpha\leqslant\frac{1}{2}\ \frac{s+1}{s+3};$$

$Q_j\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{n}}\right)$ — *полилинейная форма j-той степени, коэффициенты которой зависят от семиинвариантов случайного вектора* Θ_n.

Заметим, что из этой теоремы вытекают известные аналоги В. В. Петрова и В. Вольфа.

18. В. Статулявичус (ИФМ). **Об оценке старших корреляционных функций**

19. Л. Саулис (ИФМ). **Об асимптотическом разложении плотности распределения сумм независимых неодинаково распределенных случайных векторов**

Пусть $\xi_i=(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ik})$, $i=1, 2, \ldots, n$ — независимые неодинаково распределенные случайные векторы k-мерного эквидова пространства R^k. Не ограничивая общности, предположим, что математические ожидания компонент вектора ξ_i равны нулю.

Введем следующие обозначения: (t, x) — скалярное произведение k-мерных векторов $t=(t_1, t_2), \ldots, t_k)$ и $x=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ эвклидова пространства R^k; σ_{ij}^2 — дисперсия случайной величины ξ_{ij}, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, k$; $|\sigma_i|$ — длина вектора $\sigma_i=(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{ik})$;

$B_{nj}^2=\sum\limits_{i=1} \sigma_{ij}^2$; $|B_n|$ — длина вектора

$$B_n=(B_{n1}, B_{n2}, \ldots, B_{nk}); \qquad \tilde{\sigma}_j^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}^2,$$

$$\tilde{\sigma}=(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \ldots, \tilde{\sigma}_k); \quad \gamma_i=(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{ik})=\left(\frac{\xi_{i1}}{\tilde{\sigma}_1}, \frac{\xi_{i2}}{\tilde{\sigma}_2}, \ldots, \frac{\xi_{ik}}{\tilde{\sigma}_k}\right) -$$

случайный вектор с функцией распределения $F_i(x)$; $\Theta=(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$ — k-мерный случайный вектор с функцией распределения

$$F(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i(x);$$

V — корреляционная матрица случайного вектора Θ; V^{-1} — обратная матрица; $|V|$ — определитель матрицы V; $tVt'=\mathbf{M}\,[(\Theta, t)^2]$ — квадратичная форма, t' — вектор-столбец; $\beta_r(t)$ и $\varkappa_r(t)$ — абсолютный момент и семиинвариант r-того порядка случайной величины (Θ, t), $t\in R^k$ $p_n(x)$ — плотность распределения нормированной суммы

$$Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=\left(\frac{1}{B_{n1}}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i1}, \ldots, \frac{1}{B_{nk}}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ik}\right).$$

Нам понадобятся многочлены $P_r(it)$, определяемые с помощью формального равенства

$$\exp\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varkappa_{r+2}(it)}{(r+2)!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r\right\}=$$

$$=1+\sum_{r=1}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r P_r(it)+\sum_{r=s-2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \bar{P}_r(it).$$

Пусть

$$P_r(-\varphi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R^k} P_r(it)\, e^{-i(t, x)-\frac{tVt'}{2}}\,dt.$$

Для вычисления интеграла $P_r(-\varphi)(x)$ достаточно в полиномах $P_r(it)$ вместо произведения $(it_1)^{l_1}(it_2)^{l_2}\ldots(it_k)^{l_k}$ подставить

$$(-1)^{l_1+l_2+\ldots+l_k}\frac{\partial^{l_1+l_2+\ldots+l_k}\varphi(x)}{\partial x_1^{l_1}\,\partial x_2^{l_2}\ldots\partial x_k^{l_k}},$$

где $\varphi(x)$ — плотность k-мерного нормального закона:

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R^k} e^{-i(t, x)-\frac{tVt'}{2}}\,dt.$$

Настоящая заметка посвящена изучению строения остаточного члена в многомерной локальной предельной теореме в случае неодинаково распределенных случайных векторов ξ_i.

Случай, когда ξ_i одинаково распределены, глубоко исследован А. Бикялисом в [4], [5].

Теорема. *Если случайные векторы ξ_i имеют конечные моменты s-того порядка* ($s\geq 3$) *и ограниченные плотности* $p_{\xi_i}(\mathbf{x})\leq A_i<\infty$, *причем выполняются условия:*

1°) *ковариационная матрица V невырождена,*

2°) *существует константа M, такая, что для всех* $i=1, 2, \ldots, n$,

$$|\sigma_i|^{2k} A_i^2\leq M,$$

то

$$p_n(\mathbf{x})=\sum_{r=0}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r\cdot P_r(-\varphi)(\mathbf{x})+R_n(\mathbf{x}),$$

где

$$\sup_{\mathbf{x}}|R_n(\mathbf{x})|\leq\frac{2^{3s+2}(3s+k-2)^{s-2}\,\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{(s+k-2)\,\pi^{\frac{k}{2}}\sqrt{|V|}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|t|=1}\frac{\mathbf{M}|(\Theta, t)|^s}{[\mathbf{M}(\Theta, t)^2]^{\frac{s}{2}}}+$$

$$+2\left(\frac{4\pi M}{C_k}\right)^{\frac{k}{2}}\exp\left\{-\frac{C_k\sqrt[3]{n}}{16\pi^2 M}\min\left(c^2 n^{\frac{2}{3}}\sup_{|t|=1}\left[\frac{\mathbf{M}|(\Theta, t)|^s}{\mathbf{M}(\Theta, t)^2}\right]^{-\frac{2}{s-2}},\right.\right.$$

$$\left.\left.k^{-\frac{2}{3}}\sup_{|t|=1}\left[\frac{\mathbf{M}|(\Theta, t)|^s}{\mathbf{M}(\Theta, t)^2}\right]^{-\frac{2}{3(s-2)}}\right)\right\}+$$

$$+\left(\frac{4\pi M|B_n|^2}{C_k\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq r_1}}^{n}|\sigma_i|^2}\right)^{\frac{k}{2}}\exp\left\{-\frac{C_k|B_n|^2}{16M\max\limits_{1\leq i\leq n}|\sigma_i|^2}\right\}+$$

$$+\frac{\sqrt{M}|B_n|^k}{\max\limits_{1\leq i\leq n}^{(2)}|\sigma_i|^k}\exp\left\{-\frac{C_k\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq r_1, i\neq r_2}}^{n}|\sigma_i|^2}{8M\max\limits_{1\leq i\leq n}^{(2)}|\sigma_i|^2}\right\}+$$

$$+\frac{\sqrt{M}|B_n|^k}{\max\limits_{1\leq i\leq n}^{(2)}|\sigma_i|^k}\exp\left\{-\frac{C_k}{M}(n-2)\right\}.$$

Здесь

$$c^2=\min\left\{\frac{1}{4}, \left(\frac{s}{3\cdot 4^s}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right\};\quad C_k=C' V_{k-1}^2,$$

C' — абсолютная константа, а V_m — объем m — мерной единичной сферы; r_1 и r_2 находим из условий $\max\limits_{1\leq i\leq n}^{(1)}|\sigma_i|=|\sigma_{r_1}|$, $\max\limits_{1\leq i\leq n}^{(2)}|\sigma_i|=|\sigma_{r_2}|$, *где через* $\max\limits_{1\leq i\leq n}^{(l)}|\sigma_i|$ *обозначен l-тый максимум совокупности*

$$|\sigma_1|, |\sigma_2|, \ldots, |\sigma_n|, \quad (\max_{1\leq i\leq n}^{(1)}|\sigma_i|\geq\max_{1\leq i\leq n}^{(2)}|\sigma_i|\geq\ldots).$$

Доказательство теоремы опирается на результаты А. Бикялиса (см. [3]—[5]).

Автор благодарен В. А. Статулявичусу за постановку задачи и советы и А. Бикялису за интерес, проявленный к настоящей работе.

Литература

1. Ю. В. Прохоров, Локальная теорема для плотностей, ДАН, 83, №6, 797—800.

2. П. Сурвила, О локальной предельной теореме для плотностей, Лит. матем. сб., **III** № 2 (1963).

3. А. Бикялис, Об асимптотическом разложении для произведений многомерных характеристических функций, Теория вероятн. и ее примен., **XIV**, вып. 3, (1969), 508–511.
4. А. Бикялис, Асимптотические разложения для плотностей и распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов, Лит. матем. сб., **VIII** № 3 (1968), 405–422.
5. А. Бикялис, Неравенства для многомерных характеристических функций, Лит. матем. сб., **X** № 1 (1970), 5–12.

20. И. Банис (ВГПИ). **Об оценке скорости сходимости в многомерной интегральной предельной теореме в случае предельного устойчивого закона**

Пользуясь методом работы [1], получаем скорость сходимости в интегральной предельной теореме для множеств класса $\Gamma(B)$. Класс $\Gamma(B)$ определяется следующим образом: B — борелевское множество на единичной сфере $|x|=1$; борелевское множество A принадлежит к классу $\Gamma(B)$, если $A\subset A+\omega z$ для каждого $z\in B$ и $\omega\geqslant 0$.

Пусть

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

последовательность независимых одинаково распределенных k-мерных случайных величин, $F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)$ — функция распределения случайной величины $\xi_i\cdot n^{-\frac{1}{\alpha}}$ и $F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)$ — функция распределения суммы S_n, где

$$S_n=n^{-\frac{1}{\alpha}}(\xi_1+\ldots+\xi_n). \tag{2}$$

Предельный устойчивый закон с характеристическим показателем α $(0<\alpha<2)$ обозначим через $G(x)$.

Пусть $\mu_{ijl}(m)$ — псевдомомент и $\nu_i(m)$ — абсолютный псевдомомент:

$$\mu_{ijl}(m)=\int\limits_{R_k} x_i^{k_i}\,x_j^{k_j}\,x_l^{k_l}\,d\big(F(x)-G(x)\big) \tag{3}$$

$$k_i+k_j+k_l=m;\ k_i\geqslant 0,\ k_j\geqslant 0,\ k_l\geqslant 0;\ i,j,l=1,2,\ldots,k$$

$$\nu_i(m)=\int\limits_{R_k}|x_i|^m\,\big|d\big(F(x)-G(x)\big)\big|, \tag{4}$$

$$\nu(m)=\sum_{i=1}^{k}\nu_i(m). \tag{5}$$

Теорема 1. Если существуют абсолютные псевдомоменты $\nu_i(r)$, $r=1+[\alpha]$ и

$$\mu_{ijl}(0)=\ldots=\mu_{ijl}(r-1)=0, \tag{6}$$

то имеют место следующие оценки:

$$\sup_{A\in\Gamma(B)}|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}A)-G^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}A)|\leqslant\frac{c(k)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \tag{7}$$

при $0<\alpha<2$ и $\nu(r)\leqslant 1$,

$$\sup_{A\in\Gamma(B)}|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}A)-G^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}A)|\leqslant\frac{c(k)\,\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \tag{8}$$

при $\frac{1}{2}<\alpha<2$ и $\nu(r)>1$.

Литература

1. H. Bergstrom, On the Central Limit Theorem in R_k, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und ver Gebiet, Nr. 14 (1969), 113–126.
2. H. Bergstrom, On the Central Limit Theorem in R_k, $k>1$, Skandinavisk Aktuarietidskrift, **28** (1945), 106–127.
3. V. V. Sazonov, On the multi-dimensional Central Limit Theorem, Sankhya, Ser. A, **30**, part 2, (1968) 168–204.

21. А. Миталаускас (ИФМ). **К оценке остаточного члена в интегральной предельной теореме для случая устойчивого предельного распределения**

Рассматривается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

с функцией распределения $F(x)$. Пусть $G_\alpha(x, \lambda)$ – функция распределения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha \neq 1$ и параметром λ. Введем „псевдомоменты"

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i \, d\left(F(x) - G_\alpha(x, \lambda)\right)$$

для целых неотрицательных i и

$$\nu_r = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \left| d\left(F(x) - G_\alpha(x, \lambda)\right)\right|$$

для любых r.

Пусть для нашей последовательности (1) $\nu_\varkappa < \infty$, где $\varkappa = 1 + [\alpha]$, $[\alpha]$ – целая часть α. Нетрудно добиться, чтобы для всех $0 \leqslant i \leqslant [\alpha]$ $\mu_i = 0$.

Обозначим через $F_n(x)$ функцию распределения нормированной суммы n случайных величин последовательности (1), т.е.

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left\{\frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - A_n\right) < x\right\}.$$

Используя метод сверток, доказана

Теорема. *Для всех $n \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$\sup_x |F_n(x) - G_\alpha(x, 1)| \leqslant \begin{cases} C \dfrac{\nu_\varkappa^{\frac{1}{1+\varkappa}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} & \text{при } \nu_\varkappa \leqslant 1,\ 0 < \alpha < 2, \\[2ex] C \dfrac{\nu_\varkappa}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} & \text{при } \nu_\varkappa > 1,\ \dfrac{1}{2} < \alpha < 2. \end{cases}$$

Здесь $C = C(\alpha)$ – константа, зависящая только от показателя предельного закона α.

Результат является перенесением известного результата В. Паулаускаса [1] на случай устойчивого предельного распределения.

Литература

1. В. Паулаускас, Об одном усилении теоремы Ляпунова, Лит. матем. сб., **IX**, 2 (1969), 323–328.

22. Калинаускайте (ИФМ). **Некоторые свойства многомерных устойчивых плотностей**

23. А. Бикялис (ВГУ). **Построение асимптотического разложения для распределения суммы m-решетчатых случайных векторов**

Построено асимптотическое разложение для распределения $P_n(A)$ суммы $\mathbf{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ евклидова пространства R^k. Предположим, что ξ_1 имеет равные нулю математические ожидания и невырожденную матрицу V вторых моментов.

Пусть $F(\mathbf{x})$ — функция распределения случайного вектора ξ_1; $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ — скалярное произведение;

$$\bar{\alpha}_3(\mathbf{t}) = \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k \geq 0 \\ \nu_1+\nu_2+\ldots\nu_k=3}} \frac{3!}{\nu_1! \, \nu_2! \ldots \nu_k!} \bar{\alpha}_{(3:\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)} t_1^{\nu_1} t_2^{\nu_2} \ldots t_k^{\nu_k},$$

где $\bar{\alpha}_{(3:\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)}$ — некоторые вещественные числа; $\bar{G}_1(\mathbf{x})$ — известный интеграл (см [1], формулу (3)), для определения которого вместо третьего момента $M[(\xi_1, \mathbf{t})^3]$ использовали $\bar{\alpha}_3(t)$;

$$\bar{Q}_1^{(m)}(\mathbf{y}) = \prod_{l=1}^{m} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{n}(\mathbf{e}_l H^{-1}, \mathbf{e}_l)} S\left((\sqrt{n}\,\mathbf{y}+n\,\mathbf{a}, \mathbf{e}_l H^{-1})\right) \frac{\partial}{\partial y_l} \right\} \bar{G}_1(\mathbf{y}),$$

где $S(u) = [u] - u + \frac{1}{2}$, $[u]$ — целая часть u; $\mathbf{e}_l$ — k-мерный вектор, l-тая координата которого равна единице, а все остальные равны нулю; вектор $\mathbf{a}$ и матрица $H = \| h_{ij} \|$ из определения m-решетчатого распределения (см. [2]). Предположим, что $h_{ij}=0$ при $i \neq j$, $h_{ii}>0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ и $h_{ii}=1$ при $i=m+1, \ldots, k$.

Методом характеристических функций доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы при $n \to \infty$ имело место соотношение равномерно по всем выпуклым борелевским множествам A*

$$P_n(A) = \int_A d\bar{G}_1(\mathbf{x}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

необходимо, а для 0-решетчатых распределений $F(x)$ и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1)

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{|x_j|>z} x_j^2 \, dF(\mathbf{x}) = o(z^{-1})$$

при $z \to \infty$,

2)

$$\lim_{z \to \infty} \int_{-z}^{z} \cdots \int_{-z}^{z} (\mathbf{t}, \mathbf{x})^3 \, dF(\mathbf{x}) = \bar{\alpha}_3(\mathbf{t})$$

для всех $\mathbf{t} \in R^k$.

Теорема 2. *Для того чтобы при $n\to\infty$ равномерно по всем выпуклым борелевским множествам A имело место соотношение*

$$P_n(A)=\int\limits_A d\bar{Q}_1^{(m)}(y)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\quad m\geqslant 1,$$

необходимо, а для m-решетчатого распределения $F(x)$ с максимальным „шагом распределения" $h=|\,\text{дет}\,H\,|$ и достаточно, чтобы выполнялись условия 1) *и* 2) *теоремы* 1.

Литература

1. А. Бикялис, Асимптотические разложения для распределений сумм независимых одинаково распределенных решетчатых случайных векторов, Теор. вероят. и ее прим., 14, вып. 3(1969), 499–507.
2. А. Бикялис, О центральной предельной теореме в R^k, I., Лит. матем. сб., **XI**, № 2 (1971).

24. В. Паулаускас (ВГУ). **Еще раз о неравенстве Эссеена**

Пусть $F(x)$ — неубывающая функция, $G(x)$ — функция ограниченной вариации, $F(-\infty)=G(-\infty)$, $F(+\infty)=G(+\infty)$, $f(t)$ *и* $g(t)$, соответственно, трансформации Фурье–Стилтьеса. Пусть $H(x)$ — симметрическая плотность с характеристической функцией $\omega(t)$. Тогда для всех $T>0$ и всех x и $\alpha>0$ таких, что

$$a(x,\alpha)=2\int\limits_0^\alpha H(x-y)\,dy-1>0$$

имеет место неравенство

$$\sup_x|F(x)-G(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi a(x,\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\bigl(f(t)-g(t)\bigr)\,\omega\left(\frac{t}{T}\right)}{t}\right|dt+$$

$$+\frac{1}{a(x,\alpha)}\sup_u\int\limits_0^\alpha\left|G\left(\frac{y}{T}+u\right)-G(u)\right|H(x-y)\,dy. \tag{1}$$

Приведенная формулировка неравенства Эссеена совмещает в одном месте точность, достигнутую В. М. Золотаревым в работе [1] и общность теоремы В. В. Петрова [2]. Действительно, если $G(x)$ имеет ограниченную производную и $\sup\limits_x G'(x)\leqslant q$, то, оценивая

$$\left|G\left(\frac{y}{T}+u\right)-G(u)\right|\leqslant q\,\frac{|y|}{T}$$

и полагая $x=\frac{\alpha}{2}$, из (1) получаем неравенство В. М. Золотарева [1], а если взять $x=\frac{\alpha}{2}$, $H(x)=\frac{1-\cos u}{\pi u^2}$ и оценить во втором интеграле $|H(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}$, то из (1) получаем теорему В. В. Петрова [2].

Литература

1. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теория вероят. и ее прим, **IX**, вып. 3 (1965).
2. В. В. Петров, Оценка близости функций ограниченной вариации по близости их преобразований Фурье-Стилтьеса, Доклады АН СССР 192, № 5, (1970).

25. П. Сурвила (ВТПИ). **О скорости сходимости в законе больших чисел**

Рассматривается последовательность k-мерных независимых случайных величин $\{X^{(l)}\}$,

$$X^{(l)}=(X_1^{(l)},\ X_2^{(l)},\ \ldots,\ X_k^{(l)}),\qquad l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Пусть

$$S_n=\sum_{l=1}^{n} X^{(l)} \text{ и } \varphi_{S_n}(t)=E\{\exp(t,\ S_n)\} -$$

сумма и производящая функция моментов суммы, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ — k-мерный вектор с положительными координатами. В дальнейшем будем писать просто $\alpha>0$. И пусть

$$Q_\alpha=\{x: x\notin(-\alpha_1,\ \alpha_1)\times(-\alpha_2,\ \alpha_2)\times\ldots\times(-\alpha_k,\ \alpha_k)\},$$
$$S_R=\{x: \|x\|\geqslant R\},$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, R — положительное число, т.е. Q_α — внешность k-мерного интервала, симметрического относительно начала координат, а S_R — внешность k-мерной сферы с центром в начале координат и с радиусом R.

В настоящей заметке рассматриваются вероятности

$$P_n'(Q_\alpha)=P\left\{\frac{1}{n}\ S_n\in Q_\alpha\right\},\quad P_n(S_R)=P\left\{\frac{1}{n}\ S_n\in S_R\right\}$$

и исследуются условия, при которых эти вероятности сходятся к нулю с экспоненциальной скоростью.

Очевидно, что если для любого $\alpha>0$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(Q_\alpha)=0,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty} P_n(S_R)=0$$

для любого $R>0$.

Точно также, если для любого $R>0$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(S_R)=0,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty} P_n(Q_\alpha)=0$$

для любого $\alpha>0$.

Доказывается следующая

Теорема. *Для того чтобы*

$$P_n(Q_\alpha)\leqslant A\rho^n$$

для любого $\alpha>0$, $n=1, 2, \ldots$ *с* $A<\infty$ *и* $\rho=\rho(\alpha)<1$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $a>0$ *существовали* k-мерный *интервал*

$$T_a=\{t: t\in[-t_a,\ t_a]\times[-t_a,\ t_a]\times\ldots\times[-t_a,\ t_a]\}$$

($t_a>0$) *и константа* $M(a, k)$ *такие, чтобы при* $t\in T_a$ *выполнялось неравенство*

$$\varphi_{S_n}(t)\leqslant M(a,\ k)\exp\left\{na\sum_{i=1}^{k}|t_i|\right\}.$$

Это же условие является необходимым и достаточным также и для соотношения

$$P_n(S_R) < A_1 \varphi_1^n$$

для любого $R>0$, $n=1, 2, \ldots$ с $A_1<\infty$, и $\rho_1=\rho_1(R)<1$.

Настоящая теорема обобщает на многомерный случай известные результаты [1].

Литература

1. L. E. Baum, M. Katz, R. R. Read, Exponential convergence rates for the law of large numbers, Trans. Amer, Math. Soc., **102** (1962), 187–198.

26. В. Пипирас (ВГПИ). **Асимптотические разложения для рашетчатых распределений**

Рассмотрим независимые решетчатые случайные величины

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tag{1}$$

принимающие только значения вида a_i+hk ($h>0$, $k=0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$), с математическими ожиданиями $M\xi_i=0$ и конечными дисперсиями $\sigma_i^2=M\xi_i^2$, $i=1, \ldots, n$.

Пусть

$$B_n^2=\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \quad Z_n=\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad L_{\nu n}=\frac{1}{B_n^\nu}\sum_{i=1}^{n} M|\xi_i|^\nu,$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad z_{kn}=\frac{A_n+hk}{B_n}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

F_{Z_n} – функция распределения случайной величины Z_n, $\Phi(x)$ и $\varphi(x)-(0,1)$ – нормальная функция распределения и плотность распределения, соответственно.

Для асимптотических разложений используем функции

$$\Phi_{sn}(x)=\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2} Q_{\nu n}(x)\, L_{\nu+2, n},$$

где $Q_{\nu n}(x)$ – многочлены степени $3\nu-1$ с коэффициентами, зависящими от семиинвариантов (1) случайных величин,

$$\varphi_{sn}(x)=\frac{d}{dx}\Phi_{sn}(x)$$

и

$$D_{kn}(x)=\sum_{\nu=1}^{k-2} \delta_\nu\left(\frac{h}{B_n}\right)^\nu S_\nu\left(\frac{xB_n}{h}-\frac{A_n}{h}+\left[\frac{A_n}{h}\right]\right)\frac{d^\nu}{dx^\nu}\Phi_{sn}(x),$$

где δ_ν в зависимости от ν равно 1 или -1, а $S_\nu(x)$ – известные тригонометрические ряды (см. также [2]).

Введем условия:

I) $B_n^2=O(n)$,

II) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^{n}\max\limits_{0\leqslant r\leqslant q-1} P\left\{\dfrac{\xi_i-a_i}{h}\equiv r \pmod q\right\}<1$

для любого $q\geqslant 2$.

Теорема 1. *Если имеет место центральная предельная теорема и выполнены условия* I *и* II, *то*

$$\sup_k \left| \frac{B_n}{h} P\{Z_n = z_{kn}\} - \varphi(z_{kn}) \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема 2. *Если* $M|\xi_i|^s < \infty$ ($s \geqslant 3$ — *целое число*), $i=1, \ldots, n$, *и выполнены условия* I *и* II, *то при* $n \to \infty$ *имеем*:

$$\sup_k \left(|z_{kn}|^l \left| \frac{B_n}{h} P\{Z_n = z_{kn}\} - \varphi_{s-1,n}(z_{kn}) \right| \right) = O(L_{sn}), \quad l=0, 1, \ldots, s.$$

Теорема 3. *Если* $M|\xi_i|^r < \infty$ ($r \geqslant 3$ — *любое число*), $i=1, \ldots, n$, *и выполнены условия* I *и* II, *то при* $n \to \infty$ *имеем*:

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi_{[r],n}(x) - D_{[r],n}(x)| = \frac{O(L_{rn} + B_n^{1-[r]})}{(1+|x|)^r}$$

где $[r]$ — *целая часть* r.

Теорема 1 следует из теоремы 1 работы [1], а теоремы 2 и 3 — из теорем 3′ и 3 работы [2]

Литература

1. А. А. Миталаускас, В. А. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин, Лит. матем. сб., **VI**, 4 (1966), 569—583.
2. В. Л. Пипирас, Асимптотические разложения для функции распределения суммы независимых решетчатых случайных величин, Лит. матем. сб., **X**, 3(1970).

27. Мисявичюс (ВГУ). **Об оценке функции концентрации для случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова**

Рассматривается марковский процесс $\{\xi(j), j=1, 2, \ldots, n\}$ с пространством возможных состояний Ω, выделенной на нем σ-алгеброй $\mathcal{F}$, функцией вероятностей перехода за один шаг $\mathbf{P}(\omega, A)$ $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{F}$ и стационарным начальным распределением $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$.

Коэффициентом эргодичности переходной вероятности $\mathbf{P}(\omega, A)$ называется величина α:

$$\alpha = 1 - \sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} |\mathbf{P}(\omega, A) - \mathbf{P}(\tilde{\omega}, A)|. \tag{1}$$

Пусть в пространстве Ω задана действительная $\mathcal{F}$-измеримая функция $X(\omega)$. Случайные величины $\{X_j, j=1, 2, \ldots, n\}$, определенные равенством

$$X_j = X(\xi(j)), \; j=1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

называются величинами, связанными в однородную цепь Маркова.

Положим

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j. \tag{3}$$

Функции распределения и характеристическую случайной величины X обозначим соответственно $F_X(x)$ и $f_X(t)$.

Функцией концентрации случайной величины X называется величина $Q_X(l)$:

$$Q_X(l) = \sup_{-\infty < x < \infty} \mathbf{P}\{x \leqslant X \leqslant x + l\}, \quad 0 < l < \infty. \tag{4}$$

В дальнейшем буквой C будем обозначать конечные положительные постоянные.

Теорема. *Если* $\alpha > 0$, *то для любого конечного* L, $L \geqslant \lambda$,

$$Q_{S_n}(L) \leqslant \frac{CL \ln n}{\sqrt{n\left(1 - Q_{X_1}(\lambda)\right)}}, \quad C = C(\alpha). \tag{5}$$

Теорема обобщает аналогичный результат Эссена для независимых случайных величин и доказывается с помощью одного неравенства для оценки сверху характеристической функции суммы случайных величин, связанных в цепь Маркова, которое можно получить из результатов В. Статулявичуса (см. [1]):

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant C \exp\left\{ -\frac{\alpha^2 N}{64} \left(1 - |f_{X_1}(t)|^2\right) \right\}, \quad C = C(\alpha), \tag{6}$$

где

$$N = \left[\frac{n}{\left[\frac{\ln n}{\alpha}\right] + 2} \right]$$

и $[x]$ означает целую часть x.

С помощью неравенства (6) дальнейшее доказательство проводится таким же образом, как и для независимых случайных величин (см. [2]).

Литература

1. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. II., Лит. матем. сб., **IX**, № 3 (1969), 635–672.
2. C. G. Essen, On the Kolmogorov – Rogozin inequality for the concentration funkction, Zeitschrift [für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte [Gebiete, Band 5, Heft 3 (1966), 210–216.

28. Э. Гячяускас (ИФМ). **Распределение величины угла случайного треугольника внутри овала**

Пусть три случайные прямые пересекают овал K. Если точки их пересечения образуют треугольник внутри овала, то α – величина угла этого треугольника – имеет функцию распределения $P\{\alpha < \varphi\}$, которую определим следующим образом.

Вместо $P\{\alpha < \varphi\}$ можем рассматривать случай, когда одна точка лежит на контуре. В этом случае функцию распределения обозначим через $P_1\{\alpha < \varphi\}$.

Переход от $P(\varphi)$ к $P_1(\varphi)$ возможен благодаря дифференциальному уравнению Крофтона (см. [1]):

$$dP(\varphi, \lambda) = 3\,[P_1(\varphi, \lambda) - P(\varphi, \lambda)]\,\frac{dF(\lambda)}{F(\lambda)},$$

где λ – коэффициент подобия овала, $F(\lambda)$ – площадь преобразованного овала $K(\lambda) \cdot$ $\cdot P_1(\varphi, \lambda)$ получим из

$$P_1\{\alpha \leqslant \varphi\} = \frac{1}{(\pi - \varphi) L} \int_0^{\pi - \varphi} \int_0^L \frac{\Delta^2(s, \psi, \varphi)}{F^2}\, ds\, d\psi,$$

где $\Delta(s, \psi, \varphi)$ – площадь сектора с углом φ в овале K с центром в точке s на контуре, ψ – угол между касательной через точку s и одной стороной сектора.

Например, для круга

$$\Delta(s, \psi, \varphi) = \varphi r^2 - \frac{r^2}{2}\,[\sin(2\varphi + 2\psi) - \sin 2\psi].$$

Литература

1. M. G. Kendall, P.A.P. Moran, Geometrical probability, London, 1963.

СЕКЦИЯ ИСТОРИИ И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1. Э. Гячяускас (ИФМ). **Зачинатели распространения идей высшей математики в Литве в XVIII веке**

ТОМАС ЖЕБРОВСКИС (1714–1758) в 1750–1752 гг. слушал в Праге лекции по математике у профессора Иосифа Степлинга, который интересовался трудами Ньютона, Лейбница, Эйлера и работал над проблемами высшей математики. Сам Т. Жебровскис в 1753 г. стал профессором математики в Вильнюсском университете. Несколько его учеников защитили тезисы. (Specimen mathematicum, Vilnae, Typ. Acad., 1753, Specimen scientiae mathematicae, Vilnae, Typ. Acad., 1754, Theses mathematicae, Vilnae, Typ. Acad., 1755). Можно предполагать, что Т. Жебровскис знакомил своих учеников с analysi infinitorum (см. Specimen mathematicum).

БЕРНАРДАС СИРУТИС (1731–1784) окончил в Риме Коллегию Калазанса и защитил тезисы (Bernardus Siruc, Propositiones ex analysi infinitorum selectas, Romae, 1755), в которых, руководствуясь Хр. Вольфом, рассматривает 52 задачи дифференциального и интегрального исчислений. Б. Сирутис преподавал в течение одного года математику в Терезинской Академии (Вена), а затем в Вильнюсской коллегии пиаров. В Вильнюсе было напечатано несколько тезисов по математике (Selectae propositiones mathematicae, Vilnae Typ. Sch. Piar., 1759, Specimen mathematicae, Vilnae, Typ. Sch. Piar., 1760, Theses mathematicae, Vilnae, Typ. Sch. Piar., 1762), защищенных его учениками.

ЯКУБАС НАКЦИАНАВИЧЮС и ЮОЗАПАС ПОВИЛЯВИЧЮС в 1758 г. издали сборник задач конечного и бесконечного математического анализа. (Jac. Nakcyanowicz, Jos. Powilewicz, Exercitationes in Analysi cum finitorum tum infinitorum mathematicae, Vilnae, Typ Acad., 1758).

Профессор математики Вильнюсского университета Я. НАКЦИАНАВИЧЮС (1725–1790) в своем учебнике (Jac. Nakcyanowicz, Praelectiones mathematicae ex Wolfianis elementis adornatae, Vilnae, Typ. Acad., T. 1, 1759 T. 2, 1761) обещал коснуться и высшей математики, но в этих томах этого нет, а третий том не вышел.

2. П. Румшас (ВГУ). **Первые учебники математики на литовском языке**

Задачник по арифметике Гайлутиса [1] – первая печатная математическая книга на литовском языке. Автор неизвестен (Гайлутис – псевдоним). Задачник написан в 1879–80 г., распространялся путем переписывания от руки; рукописи использовались в тайных литовских школах (школах „даракторов"). В 1885 г. за границей (в Тильже) напечатано 3000 экз. и контрабандой переправлено в Литву.

В трех разделах задачника об отвлеченных числах, именованных числах и дробях помещено 630 задач, преимущественно текстовых. Расположение задач не соответствует принципу возрастающей трудности ни по величине чисел, ни по количеству действий, необходимых для их решения. Некоторые задачи не соответствуют назначению параграфа, в котором они помещены. Обращает на себя внимание фабула задач: она заимствована из различных областей и вполне соответствует действительности.

Некоторые задачи рекомендуется решать при помощи простейших уравнений. Это видно из ответов, где указаны рекомендуемые для составления уравнения.

Наибольшую ценность имеет словарь математических терминов в конце книги. Отсюда можно определить, какими математическими терминами пользовались в школах „даракторов". Смысл слов объясняется соответствующими терминами на польском и немецком языках. 13 из 58 помещенных в словаре терминов являются современными математическими терминами на литовском языке.

В 1886 г. напечатана теория арифметики целых чисел [2]. Автор – П. Вилейшис, известный деятель литовской культуры. Учебник состоит из семи разделов. За исключением первого раздела, в котором даны схоластические определения таких понятий, как величина, единица, число и т.п., учебник большими методическими недостатками не страдает. Отмечается стремление автора к математической строгости изложения.

Обучение арифметическим действиям ведется по следующей схеме: дается определение операции и короткое разъяснение, потом следуют следствия из определения, обозначение операции, необходимые термины, техника выполнения операции в различных случаях и способы проверки правильности результата операции. После каждого пункта дается ряд упражнений для создания навыков, а на конце раздела — сборник текстовых задач. Лучше всего автору удается объяснить технику выполнения операции. Следует отметить удачное разделение материала на маленькие дозы („пункты") и различный шрифт, который напоминает современный учебник.

В книге [3], автором которой является С. Гимжаускас, для арифметики отведено только 19 страниц. Книга относится к контрафанционной литературе: указанный год издания (1862) — ложны, так как фактически книга издана в 1888 г. Изложение арифметики ведется на низком уровне, полно грубых методических ошибок. Книга для математического просвещения не могла иметь сколько-нибудь ощутимого значения.

„Арифметика" С. Скачкаускаса [4] содержит уже полный курс арифметики. Заслуживает внимания методическая сторона учебника: в начале каждого параграфа выдвигается проблема, вытекающая из нужд практики, для решения которой вводится соответствующая арифметическая операция; правила действий выводятся после рассмотрения и обобщения конкретного примера. После обучения технике действия указывается 2—3 задачи, для решения которых применяется изученное действие.

Особое внимание автор уделяет обучению решения задач, указывает необходимость анализировать задачу и на примерах показывает, как провести анализ. Следует подчеркнуть стремление автора научить читателя пользоваться арифметикой для нужд повседневной жизни.

Предлагаем три примера сравнения арифметических терминов, используемых в указанных книгах.

	1	2	3	4	Современный термин на литовском яз.
цифра	numeris	rokuotinė	pražas	skaitlinė	skaitmuo
единица	vienatis	vienybė	vienuolakis	vienutė	vienetas
остаток, разность	likius, skirtumas	liekana	likis	atskirmė, likinys	liekana, skirtumas

Литература

1. *Užduotinas, tai ira Rankius užduocziu Aritmetikos arba Rokundos mokslo.* Iš wisokiu pasamu sutaisė J. Gailutis. Tilžėje 1885 m. (на лит. яз.).
2. [P. Vileišis] *Keturi svarbiausiejie veikalai Aritmetikos.* Paraszyti Petro Nėrio. Tilžė, 1886 (на лит. яз.).
3. [S. Gimžauskas] *Padžomokslis Lietuwiszko spaudraszczo ir rankraszczo su pridėjimu Skaitmanio.* Parasze Endre Mainionis Lietuwis. Warszowoje 1862. (на лит. яз.).
4. [S. Skačkauskas] *Aritmetika.* Sutaisė S. Skaczkauskas. Chicago, Ill., 1897 (на лит. яз.).

3. Л. Кульвецас (ВГПИ). **Об одной ошибке Н. Х. Абеля**

Работа Н. Х. Абеля [1] является одной из первых попыток определить влияние Луны на движение математического маятника вблизи поверхности Земли. Однако в этой работе Абель допустил существенную ошибку (см., напр., [2]). Эту ошибку в современных терминах можно охарактеризовать следующим образом.

Пусть $\mathbf{f}_T(M)$ — вектор напряженности гравитационного поля Земли в положении M математического маятника, $\mathbf{f}_L(M)$ — вектор напряженности гравитационного поля Луны в той же точке M, $\mathbf{a}_C$ — вектор абсолютного ускорения центра масс Земли C. Если вместе с Абелем пренебречь вращением Земли и действием на систему Земля—Луна других небесных тел, то вектор напряженности поля тяжести, связанного с Землей, в точке M есть

$$\mathbf{g}_T(M)=\mathbf{f}_T(M)+\mathbf{f}_L(M)-\mathbf{a}_C$$

(см. [3]). Ошибка Абеля состоит в том, что, определяя в своей работе отклонение отвеса, обусловленное притяжением Луны, и модуль вектора напряженности поля тяжести, связанного с Землей, в положении данного маятника, он принял во внимание лишь гравитационное притяжение этого маятника Луной и Землей (векторы $\mathbf{f}_T(M)$ и $\mathbf{f}_L(M)$) и упустил из виду абсолютное ускорение центра масс Земли (вектор $\mathbf{a}_C$).

Как ни странно, но эту грубую ошибку нередко допускают и теперь. Например, мы встречаем ее в определениях понятия силы тяжести следующего типа:

„Сила тяжести на Земле является равнодействующей двух сил: силы притяжения данного тела, участвующего во вращении Земли, всеми массами Вселенной (в основном Земли), и центробежной силы, возникающей в результате вращения Земли“ [4].

В наших обозначениях это определение таково:

$$\mathbf{G}=m\mathbf{f}_T(M)+m\mathbf{f}_{U-T}(M)-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overline{CM}) \tag{1}$$

($\mathbf{G}$ — сила тяжести на Земле, m — масса данного тела, $\mathbf{f}_{U-T}(M)$ — вектор напряженности гравитационного поля Вселенной, кроме Земли, в точке M, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости Земли). Здесь также упущено из виду ускорение центра масс Земли $\mathbf{a}_C$, в результате чего среди составляющих вектора $\mathbf{G}$ нет приливообразующей силы $m[\mathbf{f}_{U-T}(M)-\mathbf{a}_C]$ — совершенно также, как в вычислениях Абеля нет приливообразующего ускорения $\mathbf{f}_L(M)-\mathbf{a}_C$. Из-за этого упущения дефиниция (1) противоречит принятой в геофизике точке зрения, согласно которой изменение силы тяжести в основном обусловлено наличием в ней приливообразующих составляющих (см., напр., [5]). Следовательно, в определении (1) допущена та же ошибка, которую в 1824 году совершил Н. Х. Абель.

Литература

1. N. H. Abel, Om Maanens Indflydelse paa Pendelens Bevaegelse, Magazin for Naturvidenskaberne, Bd. I, H. 2, 1824, S. 219—226.
2. **R. Radau, Revue des publications astronomiques, Bull, Astron., t. I,** 1884, p. 50.
3. Л. Кульвецас, Опыт экспликации понятия веса тела, Материалы Второго научно-методического семинара преподавателей физики вузов Прибалтийских республик и Белорусской ССР, Тарту, 1970, стр. 52, 53.
4. М. С. Молоденский, Гравиметрия, БСЭ, 2-е изд., т. 12, стр. 374.
5. **F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie, II T., Leipzig, 1884, S. 383.**

4. А. Вайткявичюс (Шакяй). **Об одном методе определения делителей натуральных чисел**

Пусть дано натуральное число

$$N=10^2a_0+10a_1+a_2,$$

где a_0 — любое неотрицательное число, a_1 — однозначное неотрицательное целое число, $a_2=5$.

Пользуясь некоторыми свойствами сравнений и уравнений, вычисление наличия делителей числа N на числа вида

$$n=10\beta+\gamma,$$

где β — неотрицательное целое число, $\gamma=5$, сводится к исследованию квадратного относительно β уравнения

$$\beta^2-(2k+a_1)\beta+5a_2-k=0,$$

где k — целое число, т.е. выяснению, при каких из подлежащих испытанию значениях параметра k указанное уравнение имеет целые неотрицательные корни. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант указанного уравнения

$$D=4k^2+4(a_1+1)k-20a_0+a_1^2$$

был равен квадрату целого числа.

Для параметра k имеем:

$$k=\left(\frac{5N}{n}+n\right)\Big/20-\frac{a_1+1}{2}.$$

Пользуясь этим выражением для k, можем определить область подлежащих испытанию значений параметра k при выяснении делимости данного числа N на числа n, заключенные в интервале $\left(l;\ \frac{5N}{l}\right)$, а именно:

$$\left[0{,}1\sqrt{5N}-\frac{a_1+1}{2}\right]<k\leqslant\left[0{,}05\left(\frac{5N}{l}+l\right)-\frac{a_1+1}{2}\right].$$

Для довольно больших чисел число подлежащих испытанию значений параметра k довольно большое: для уменьшения этого числа применяется метод отсеивания: пользуясь особыми таблицами, составленными на основании признаков неизвлекаемости квадратного корня из натуральных чисел, из всех подлежащих испытанию значений k, значительную часть этих значений вычеркиваем, а остальные проверяем непосредственной их подстановкой в выражение для D. Кроме того, по практическим соображениям, выяснение наличия некоторой части самых малых делителей данного числа N выгодно оставлять для метода последовательных проб.

Хотя условия выведены для исследования делимости чисел, которые оканчиваются на 5, на числа, которые тоже оканчиваются на 5, нетрудно понять, что все это можно использовать для исследования делимости любых чисел ($a_2=1, 3, 7, 9$) на любые числа ($\gamma=\pm1,\ \pm3$). Для этого исследование делимости числа N надо заменить исследованием делимости числа, например 25 N.

Необходимо отметить, что указанный вопрос можно решить и в более общем виде, а именно, можно вывести условия делимости числа N, где $a_2=1, 3, 7, 9$, на числа n, где $\gamma=\pm1,\ \pm3$.

Эффективность вышеописанного метода при исследовании довольно больших чисел значительно больше эффективности других известных методов, хотя практические возможности и этого метода тоже ограничены.

5. В. Клебанскис (РИУУ). **К вопросу об исследовании геометрических задач с параметрами**

6. Р. Румшас (ВГУ). **Необходимые и достаточные условия в курсе средней школы**

7. И. Андрюнас (Зарасай). **Некоторые вопросы взаимодействия математики и физики в средней школе**

8. М. Готлерас (ВГПИ). **Результаты олимпиады 1970 г. юных математиков Литвы.**

УДК 519.21

О точности аппроксимации распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин нормальным распределением, А. Бикялис, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 237.

В заметке показано, что условия И. А. Ибрагимова являются необходимыми и достаточными для неравномерной оценки остаточного члена в центральной предельной теореме теории вероятностей, а также в локальных предельных теоремах (в матрице пространства l_1 и L_1). Библ. 7.

УДК 517.53

Аналог формулы Пуассона-Иенсена с двойным интегралом, В. П. Кабайла, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 241.

В статье получена формула, связывающая двойной интеграл

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|<\rho} \ln|f(z)|\, \rho^2 \frac{(\rho^2-|\lambda|^2)^2}{|\rho^2-\bar{\lambda} z|^4}\, dS_z,$$

где $f(z)$ – мероморфна в круге $|z|<R$, $|\lambda|<\rho<R$, со значениями $\ln|f(\lambda)|$, нулевыми точками и полюсами функции $f(z)$. В частности, для любой аналитической в единичном круге и тождественно не равной нулю функции $f(z)$ доказано: для того, чтобы интеграл $\iint\limits_{|z|<\rho} \ln|f(z)|\, dS_z$ был ограничен константой, не зависящей от ρ, $0\leqslant\rho<1$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\lambda_k\}$ нулевых точек функции $f(z)$ удовлетворяла условию:

УДК 513

О локальных центро-конформных пространствах и охватывающей псевдогруппе преобразований, М. Т. Кондауров, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 255.

Исследуется псевдогруппа, подгруппой которой является группа конформных преобразований. Найден геометрический объект, соответствующий упомянутой подгруппе и в отдельных случаях найдена связь между проективным пунктором и компонентами упомянутого объекта. Библ. 2.

$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)^2<\infty$. Тому же условию удовлетворяют и нули любой аналитической в единичном круге функции $f(z)$, для которой $\iint\limits_{|z|<1}\ln^+|f(z)|\,dS_z<\infty$ (функции класса A′). Кроме того, доказано, что нулевые точки $\{\lambda_k\}$ аналитической в единичном круге функции, для которой $\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|^p\,dS_z<\infty$ (функции класса H'_p), удовлетворяют условию: $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)^{\gamma}<\infty$ для любого $\gamma>1$. Библ. 4.

УДК 511

О распределении значений мультипликативных функций, И. Кубилюс, З. Юшкис, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 261.

Пусть $g(m)$ вещественная мультипликативная арифметическая функция. Предположим, что ряды по простым числам

$$\sum_{g(p)\leqslant 0}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p<c}}\frac{a_p\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p\geqslant c}}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{g(p)\neq 0}\frac{a_p}{p},$$

$$\sum_{p}\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha},\qquad (1)$$

где $a_p=|\ln|g(p)|-\lambda|$ сходятся при некоторых $\lambda\neq 0$ и $c>0$. Тогда для всех x и $n\geqslant 3$ число целых положительных $m\leqslant n$, для которых

$$g(m)<|x|^{|\lambda|(\ln\ln n)^{1/2}}\ln^\lambda n\,\mathrm{sgn}\,x,$$

УДК 517.548

Решение некорректной задачи для линейного уравнения с линейным неограниченным симметрическим оператором в гильбертовом пространстве, Б. И. Кунейкайте, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 275.

Наряду с уравнением $Af=g$ (1), рассматривается уравнение

$$(A_{\delta_n}+i\alpha_n I)f=g_{\delta_n},\qquad (2)$$

где $A_{\delta_n}=A+\delta_nA$, δ_nA — ограниченный симметрический оператор в пространстве H, $\|\delta_nA\|\leqslant\delta_n$, $g_{\delta_n}\in H$, $\|g-g_{\delta_n}\|\leqslant\delta_n,\alpha_n$, $\delta_n>0$. В работе доказывается, что в том случае, когда для некоторых последовательностей положительных чисел $\{\delta_n\}$ и $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n=\alpha_n(\delta_n)$, α_n, $\delta_n\to 0$ и $\delta_n=0(\alpha_n)$, существуют решения уравнений (2) f_{δ_n,α_n}, а также для некоторых $\{\delta_n'\}$ и $\{\alpha_n'\}$ — решения уравнений

$$(A+i\alpha_n' I)f=g_{\delta_n'},\qquad (3)$$

УДК 519.21

О максимуме однородного нормального поля, Р. Лапинскас, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 281.

При определенных условиях, налагаемых на случайное поле $\eta=\eta(x_1,\ldots x_n)$ с $M\eta\equiv 0$, $D\eta\equiv 1$, доказываются две теоремы.

Теорема 1. При любом $\varepsilon>0$ почти наверное найдется такое (случайное) x_0 ($x_0<\infty$), что при всех $x>x_0$

$$\Big|\max_{\substack{x_i\in[0,x]\\ i=\overline{1,n}}}\eta(x_1,\ldots,x_n)-\sqrt{2n\ln x}\Big|<\frac{(1+\varepsilon)\ln\ln x}{\left(\frac{2n}{(n+1)^2}\ln_x\right)^{\frac{1}{2}}}$$

равно

$$n\Phi(x)+\frac{Bn}{\sqrt{\ln\ln n}},$$

где множитель B ограничен константой, зависящей только от функции $g(m)$. Здесь

$$\Phi(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)G(-\ln x) & \text{при } x>0,\\ \frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)G\left(-\ln(-x)\right) & \text{при } x<0,\end{cases}$$

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du,$$

$$\omega_k=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)\cdot\qquad(k=0,\ 1)$$

Аналогичный результат доказан для функций $g(m)$, удовлетворяющих условиям, которые получаются из (1) путем замены $g(p)>0$ на $g(p)<0$ и $g(p)\leqslant 0$ на $g(p)\geqslant 0$. Библ. 3.

где $\{\delta'_n\}$ и $\{\alpha'_n\}$ — последовательности чисел, удовлетворяющих тем же условиям, что и $\{\alpha_n\}$, $\{\delta_n\}$ (возможно $\delta_n=\delta'_n$, $\alpha_n=\alpha'_n$) и $\|g-g_{\delta'_n}\|\leqslant\delta'_n$, f_{δ_n,α_n} сходится к нормальному решению уравнения (1). Библ. 6.

Теорема 2. Для случайной величины ω:

$$\max_{\substack{x_i\in[0,\,x[\\ i=\overline{1,n}}}\eta(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sqrt{2n\ln x}+\frac{(n-1)\ln\ln x}{\sqrt{2n\ln x}}-\frac{\ln An}{\sqrt{2n\ln x}}+$$

$$+\frac{\omega}{\sqrt{2n\ln x}}$$

существует следующее предельное распределение

$$\lim P\{\omega\leqslant z\}=e^{-e^{-z}}.$$

Указанные теоремы обобщают результаты, полученные ранее для случайных процессов. Библ. 8.

УДК 517. 432.1

О сходимости и сверхсходимости одного интеграла типа Лапласа—Стилтьеса, А. Л. Мишкялявичюс, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 289.

Для интеграла

$$f(z)=\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda(t)z}\, dA(t), \tag{1}$$

где комплекснозначная функция $A(t)$ имеет ограниченную вариацию на каждом отрезке из $[0, \infty)$, а кривая $z=\lambda(t)=\mu(t)+i\nu(t)$ — гладкая или кусочно-гладкая, доказаны теоремы:

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)=\infty; \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \,|\arg \lambda'(t)|=\alpha<\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

и интеграл (1) *сходится в точке* Z_0, *то он сходится в угле* $U(z_0)$:

$$-\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)<\arg(z-z_0)<\frac{\pi}{2}-\beta,$$

УДК 519.21

Несколько замечаний о разрежении рекуррентных потоков, И. Модеруди, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 303.

Рассматривается последовательность случайных величин $\tau_0=0\leqslant\tau_1\leqslant\leqslant\tau_2\leqslant\ldots$, задающая рекуррентный поток событий. Пусть $\nu_i^{(n)}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих положительные целые значения, не зависящие от потока. Обозначим $\tau_i^{(1)}=\tau_i$, $\tau_i^{(n)}=\tau_{\nu_i^{(n)}+\ldots+\nu_i^{(n)}}$, $(n\geqslant 2,\ i=0, 1\ldots)$. В предположении, что $0<D^2(\nu_i^{(n)})=\sigma^2<\infty$ найдены необходимые и достаточные условия для существования предельного распределения разниц $\delta_n(\tau_i^{(n)}-\tau_{i-1}^{(n)}-\tau_{i-1}^{(n)}$, когда $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$. В качестве следствия получается известный результат А. Реньи. Библ. 10.

УДК 519.21

Одна оценка скорости сходимости с псевдомоментами, В. Паулаускас, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 317.

В заметке рассматривается оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для одинаково распределенных слагаемых, когда эти слагаемые имеют m первых моментов, совпадающих с соответствующими моментами стандартного нормального распределения, и конечный псевдомомент порядка $m+\delta$ ($m\geqslant 2$ — целое число, $0<\delta\leqslant 1$). Приведенные одномерные и многомерные результаты обобщают оценки автора, опубликованные в Лит. матем. сб., IX, № 4 (1969) и XI, № 1 (1971). Библ. 10.

где $\beta=\lim \arg \lambda(t)$ *и* $\gamma=\lim \arg \lambda(t)$. *Сходимость является равномерной в угле* $U(z_0,\ \delta):\ -\left(\frac{\pi}{2}+\gamma-\delta\right)<\arg(z-z_0)<\frac{\pi}{2}-\beta-\delta;\ \delta>0.$

Теорема 2. *Если выполнено условие* (2) *и* $A(t)=\text{const}$ *на последовательности* $p_n\leqslant t\leqslant q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=\infty$, *причем* $|\lambda(q_n)|>|1+\vartheta_n|\,|\lambda(p_n)|$, $\lim\limits_{n\to\infty}\vartheta_n=\infty$, *то последовательность интегралов* $\left\{\int\limits_0^{p_n} e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right\}$ *сходится равномерно к* $f(z)$ *во всякой конечной области, внутренней к естественной области существования этой функции.*

Теорема 3. *Пусть* ζ_0 — *точка на границе области сходимости интеграла* (1) *такая, что* 1) $f(z)$ — *голоморфна в точке* ζ_0, 2) *существует круг, целиком лежащий в области сходимости этого интеграла и касающийся границы в точке* ζ_0. *Если* $\max(|\beta|,\ |\gamma|)<\frac{\pi}{2}$ α *и* $A(t)=\text{const}$ *на последовательности отрезков* $p_n\leqslant t\leqslant q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=\infty$, *причем* $|\lambda(q_n)|>(1+\vartheta)\,|\lambda(p_n)|$, $\vartheta>0$, *то последовательность интегралов* $\left\{\int\limits_0^{p_n} e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right\}$ *стремится к* $f(z)$ *равномерно в некоторой окрестности точки* ζ_0, Библ. 6.

УДК 517.548 : 513.88 : 518

Линейные уравнения с неограниченными линейными операторами, С. Ремейкис, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 329.

В заметке рассматриваются уравнения

$$Af=g,$$

$$(A_\delta+i\alpha I)f=g_\delta,$$

$$(A+i\alpha I)f=g_{\delta'},$$

где A, A_δ — линейные (ограниченные или неограниченные) операторы в гильбертовом пространстве H и $\|A_\delta-A\|\leqslant\delta$; g, g_δ, $g_{\delta'}\in H$; $\|g-g_\delta\|\leqslant\delta$; $\|g-\tilde{g}_{\delta'}\|\leqslant\delta'$; α, δ, $\delta'>0$. Библ. 4.

УДК 517.916

О росте целых трансцендентных решений дифференциальных уравнений, Ш. И. Стрелиц, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 333.

Известный метод Вимана—Валирона определения порядка и типа целых трансцендентных решений алгебраических дифференциальных уравнений

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(n)})=0, \tag{1}$$

не приводит часто к результату в тех случаях, когда в P встречаются выражения вида $(\ln w)^{(k)}$. В работе исследуются именно такие уравнения, из которых удается извлекать информацию о росте их интегралов. Исследование уравнения (1) проводится с помощью найденных автором для выражений

$$\left(\zeta\frac{d}{dz}\right)^k \ln w(\zeta)$$

в точках максимума, в которых $\max\limits_{|z|=|\varphi|}|w(z)|=|w(\zeta)|$. Библ. 4.

УДК 518.9

Некоторые уравновешенные пары стратегий в играх на единичном квадрате, Д. Суджюте, Л. Горелик, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 343.

Рассматривается игра на единичном квадрате с ограниченными ядрами $K(\zeta, \eta)$, $L(\zeta, \eta)$, удовлетворяющими следующим условиям:

1) функции $K(\xi, 0)$ и $L(0, \eta)$ — непрерывны и монотонно возрастают в интервале (0, 1];

2) функции $K(\xi, 1)$ и $L(1, \eta)$ — непрерывны и монотонно возрастают в интервале [0, 1).

Даются условия существования уравновешенных пар, в которых спектры функций распределения содержатся в множестве $\{0, 1\}$ (теоремы 1—4), выражаемые через значения функций K и L в угловых точках единичного квадрата и пределы $\lim\limits_{\xi\to 0} K(\xi, 0)$, $\lim\limits_{\xi\to 1} K(\xi, 1)$, $\lim\limits_{\eta\to 0} L(0, \eta)$, $\lim\limits_{\eta\to 1} L(1, \eta)$. В случае существования этих уравновешенных пар стратегий указан их вид. Библ. 5.

УДК 519.214

О предельном распределении одного функционала от последовательности независимых случайных величин, Сурвила П., «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 351.

Пусть $\{\xi_i\}$ последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями, дисперсиями τ_i^2 и конечными абсолютными моментами третьего порядка. Положим

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad B_i^2=\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \quad E\{\xi_i^3\}=\alpha_{3i},$$

$$\Phi_{3n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du+\frac{(1-x^2)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}}{6B_n^3\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{3i},$$

$$G(x)=\begin{cases} 0, \ x\leqslant 0. \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{x}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du, \quad x>0. \end{cases}$$

УДК 511

Уточнение одной предельной теоремы для аддитивных функций, заданных на множестве значений полинома, Ж. Толеуов, А. С. Файнлейб, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 367.

Доказывается равномерная оценка остаточного члена в интегральной теореме для одного класса аддитивных функций, когда аргумент пробегает множество значений полинома в числах последовательности, которая в определенном смысле равномерно распределена по классам вычетов для „почти всех" модулей. Из полученных результатов следует, например, что если $\varphi(m)$ — функция Эйлера, $K(u)$ — целочисленный полином, $K(p)\neq 0$ (p — простые числа), $K(0)\neq 0$, s — число различных неприводимых множителей $K(u)$, то

$$\frac{1}{\pi(x)}N\Big(p\leqslant x,\ \varphi\big(|K(p)|\big)<W|K(p)|\Big)=\Phi_K(W)+$$
$$+O\left(\frac{(\ln\ln x)^{2s}}{(\ln x\ln\ln\ln x)^s}\right)$$

УДК 517.537

О двойной неоднородной системе разностных уравнений. Л. И. Трушина, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 383.

Изучаются мероморфные и целые решения двойной системы

$$\begin{cases} L[f(z)]\equiv\sum_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k)=g(z), \ a_1=1, \ a_m\neq 0, \ \alpha_1=0, \\ M[f(z)]\equiv\sum_{i=1}^{n} b_i f(z+\beta_i)=h(z), \ b_1=1, \ b_n\neq 0, \ \beta_1=0, \end{cases}$$

---

1. Пусть $g(x)$ интегрируемая по Риману на конечном интервале (a, b) функця, равная нулю вне этого интервала, и $S(g)=\int_a^b g(x)\,dx\neq 0$.

Если удовлетворяются условия

A. $\lim\limits_{i\to\infty}\sigma_i^2=\sigma^2$, где $0<\sigma^2<\infty$,

B. $P\left\{\frac{S_n}{B_n}<x\right\}=\Phi_{3n}(x)+0\left(\frac{0}{B_n}\right)$,

то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sigma^2\sum\limits_{j=1}^{n} g(S_j)}{S(g)\,B_n}<x\right\}=G(x).$$

2. Обозначим для конечного $a>0$ через $M_n(a)$ число частичных сумм S_k, $1\leqslant k\leqslant n$, удовлетворяющих неравенству $|S_k|<a$. Если выполняются условия A, B, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sigma^2 M_n(a)}{2a\,B_n}<x\right\}=G(x).$$ Библ. 4.

равномерно по W, и

$$\sup_W\left|\frac{1}{\pi(x)}N\Big(p\leqslant x,\ \varphi\big(|K(p)|\big)\leqslant W|K(p)|\Big)-\Phi_k(W)\right|=$$
$$=\Omega\left(\frac{1}{(\ln x)^s}\right),$$

где $\Phi_k(W)$ — функция распределения. Библ. 7.

где

a_k, α_k и b_i, β_i, $k=1, 2, \ldots, m$; $i=1, 2, \ldots, n$ —

комплексные числа, а $g(z)$ и $h(z)$ — заданные целые функции экспоненциального типа. Предполагается, что $\alpha_k=t_k\alpha$, $\beta_k=\tau_k\beta$, где

$$0<t_1<t_2<\ldots<t_m=1,\ 0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_n=1,\ \mathrm{Im}\,(\alpha:\beta)\neq 0.$$

Теорема. *Для того, чтобы система* (*) *имела мероморфные решения, необходимо и достаточно, чтобы* $L[h(z)]=M[g(z)]$.

Изучаются полюсы и главные части мероморфных решений. В работе приводятся также необходимые и достаточные условия для существования целых решений системы (*). Библ. 2.

УДК 513

О движениях в пространстве гиперплоскостных элементов, А. П. Урбонас, «Литовский математический сборник», 1971, XI, № 2, 397.

В работе доказано, что пространство гиперплоскостных элементов (X^i, U_k) с усеченной аффинной связностью допускает группу движений порядка не выше n^2. Библ. 3.