XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1971

УДК 513. 836

# ОБОБЩЕННЫЕ МИКРОПУЧКИ И ЛОКАЛЬНО ПЛОСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ

А. И. Матузявичюс

## 1. Предварительные понятия

В начале мы приведем некоторые сбозначения, которыми будем в дальнейшем пользоваться.

Пусть $R^n$ – действительнсе числовое векторное $n$-мерное пространство:

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\},$$

$R_+^n \subset R^n$ – полупространство пространства $R^n$:

$$R_+^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n_{| x_1 \geq 0} \},$$

$S^n$ – единичная, $n$-мерная сфера:

$$S^n = \{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{n+1}_{| x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1} \},$$

$D^n$ – единичный, открытый, $n$-мерный диск:

$$D^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n_{| x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1} \},$$

замкнутый $n$-мерный единичный диск сбозначим через $\bar{D}^n$. Открытый, соответственно замкнутый $k$-мерный диск получим так:

$$D^k = D^n \cap R^k, \quad \bar{D}^k = \bar{D}^n \cap R^k,$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$.

Далее, пусть

$$D^{n-k} = \{ y \in D^n, \quad y_i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k \},$$

тогда имеем естественные проекции

$$\pi_1 : D^n \to D^k, \quad \pi_2 : D^n \to D^{n-k},$$

определенные соответственно формулами

$$\pi_1 (y) = \pi_1 (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

$$\pi_2 (y) = \pi_2 (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n),$$

где $y \in D^n$.

Пусть $G(R^n, 0)$ – группа гомеоморфизмов пространства $R^n$, сохраняющих точку $(0, 0, \ldots, 0)$, а $G(R^n, R^k, 0)$ – группа гомеоморфизмов пространства $R^n$, которые еще подпространство $R^k \subset R^n$ переводят на себя. Эти группы рассматриваем с компактно открытой топологией и тем же самым они являются топологическими группами.

С помощью одноточечной компактификации пространства $R^n$ получаем сферу $S^n$. Таким образом, полученная $S^n$ имеет две канонически отмеченные точки: точку, в которую переходит точка $(0, 0, \ldots, 0)$ и присоединенную точку. Эти точки соответственно обозначим $0, \infty \in S^n$.

Если группу гомеоморфизмов сферы $S^n$, которые сохраняют отмеченные точки $0, \infty$, обозначим через $G(S^n, 0, \infty)$, то в силу того, что любой гомеморфизм пары $(R^n, 0)$ однозначно продолжается до гомеоморфизма тройки $(S^n, 0, \infty)$, с помощью леммы 1.3 [6] получаем изоморфизм топологических групп

$$G(R^n, 0) \approx G(S_n, 0, \infty).$$

Наконец, пусть $G(\bar{D}^n, \partial D^n)$ — группа таких гомеоморфизмов диска $\bar{D}^n$, которые точечно сохраняют все точки границы $\partial D^n$ диска $\bar{D}^n$.

Определим гомеоморфизм $h_n : R^n \to D^n$ формулой

$$h_n(x) = \frac{x}{1 + \| x \|},$$

где

$$x \in R^n \text{ и } \| x \| = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

обратный гомеоморфизм $g_n : D^n \to R^n$ определим формулой

$$g_n(y) = \frac{y}{1 - \| y \|},$$

где $y \in D^n$.

Еще заметим, что

$$h_k = h_{n \mid R^k} : R^k \to D^k \quad \text{и} \quad g_k = g_{n \mid D^k} : D^k \to R^k,$$

где $0 \leqslant k \leqslant n$.

Теперь определим отображение

$$\alpha' : D^n \times D^n \times \bar{D}^n \to \bar{D}^n$$

равенством

$$\alpha'(y, z, \omega) = \begin{cases} h_n(g_n(\omega) + g_n(z) - g_n(y)), & \omega \in D^n, \\ \omega, & \omega \in \partial D^n, \end{cases}$$

где $(y, z) \in D^n \times D^n$.

Такое отображение $\alpha'$, в свою очередь, определяет отображение $\alpha : D^n \times D^n \to G(\bar{D}^n, \partial D^n)$ с такими свойствами:

1) $\alpha(y, z)(y) = z, \ (y, z) \in D^n \times D^n$,
2) $\alpha(y, y) = 1, \ y \in D^n$,
3) $\alpha(y, z)_{\mid \partial D^n} = 1, \ (y, z) \in D^n \times D^n$,
4) $\alpha : D^k \times D^k \to G(\bar{D}^k, \partial D^k) \subset G(\bar{D}^n, \partial D^n)$.

Определим, наконец, отображение $\beta_{n, k} : D^n \to D^n$ соотношением

$$\beta_{n, k}(y) = \alpha\left(0, \pi_1(y)\right)\left(\pi_2(y)\right), \ y \in D^n.$$

Не представляет трудности проверить, что отображение $\beta_{n,k}$ гомотопно относительно центра тождественному отображению пар

$$(D^n,\ D^n \setminus 0) \to (D^n,\ D^n \setminus 0).$$

Теперь предположим, что $M$ — топологическое $n$-мерное многообразие и возьмем в нем открытое множество $U \subset M$, замыкание которого гомеоморфно $\bar{D}^n$.

В силу вышеизложенного имеем отображение $\alpha : U \times U \to G(M)$, где $G(M)$ — пространство гомеоморфизмов многообразия $M$ с компактно-открытой топологией. Отображение $\alpha$ удовлетворяет условиям:

1) $\alpha(x, y)(x) = y,\ (x, y) \in U \times U,$
2) $\alpha(x, x) = 1,\ x \in U,$
3) $\alpha(x, y)_{|M \setminus U} = 1,\ (x, y) \in U \times U.$

Если $\bar{U}$ — компакт, тогда группа гомеоморфизмов множества $\bar{U}$, фиксированных на $\partial U$, является топологической группой, естественно вложенной в группу $G(M)$. Эту группу обозначим $G(U, \partial U)$.

Далее пусть отображение $i : G(M) \to G(M)$ задается соотношением $i(h) = h^{-1}$, тогда отображение $i_\alpha : U \times U \to G(M)$ будет непрерывным даже если $M$ и не будет компактом.

## 2. Понятие обобщенного микропучка

**Определение 2.1.** Обобщенный микропучок есть собрание следующих объектов:

1) пары пространств $(E,\ E')$, называемой „тотальным пространством“;
2) пространства $B$, называемого базисным пространством;
3) отображений $s$ и $p$, состовляющих коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, dashed, "p"] & \\ B \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[rr, "\text{тожд.}"] & & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E' \arrow[dr, dashed, "p_{|E'}"] & \\ B \arrow[ur, dashed, "s_{|s^{-1}(E')}"] \arrow[rr, "\text{тожд.}"] & & B \end{tikzcd}$$

(сокращенно обе эти диаграммы условно будем записывать с помощью одной диаграммы)

$$\begin{tikzcd} & (E,\ E') \arrow[dr, dashed, "p"] & \\ B \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[rr, "\text{тожд.}"] & & B \end{tikzcd}$$

4) пары $(F,\ F')$, называемой „слоем“, которая имеет гомотопический тип пары евклидовых пространств $(R^n,\ R^m)$;

5) семейства окрестностей $\{U_i\}$, покрывающих все пространство $B$ и занумерованных элементами некоторого множества $I$;

6) заданного для любого $i$ из $I$ гомеоморфизма

$$h_i : (V_i, V'_i) \to (U_i \times F, U_i \times F'),$$

где $(V_i, V'_i)$ — пара окрестностей соответственно в пространствах $E$, $E'$.

Требуется при этом, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1) $sU_i \subset V_i$, $pV_i \subset U_i$,

2) имеет место коммутативная диаграмма (удовлетворяется условие локальной тривиальности)

$$\begin{tikzcd}
& (V_i, V'_i) \arrow[dr, "p|(V_i, V'_i)"] \arrow[dd] & \\
U_i \arrow[ur, "s|U_i"] \arrow[dr, "q_1"'] & & U_i \\
& (U_i \times F, U_i \times F') \arrow[ur, "q_2"'] &
\end{tikzcd}$$

где отображения $q_1$ и $q_2$ определяются соответственно соотношениями $q_1(u) = (u, *)$, $q_2(u, x) = u$, $u \in U_i$, $x \in F$ (соответственно $x \in F'$), наконец, $*$ — фиксированная точка соответственно пространств $F$, $F'$.

Коротко обобщенные микропучки будем обозначать парой латинских букв, например, $(x, x') = (E, E', B, s, p)$.

Любой обобщенный микропучек $(x, x')$ со слоем $(F, F')$ содержит естественные обобщенные подмикропучки $x = (E, B, s, p)$ и $x' = (E', B, s, p)$ соответственно со слоями $F$ и $F'$.

### 3. Примеры обобщенных микропучков

1. $(R^n, R^m)$ — микропучок, где $0 \leqslant m \leqslant n$ [6].

2. Пусть $M^n$ — $n$-мерное топологическое многообразие, которое является еще сеперабельным метрическим пространством. Возьмем еще другое $(n+k)$-мерное топологическое многообразие $M^{n+k}$, которое, как и многообразие $M^n$, может быть и с границей.

**Определение 3.1.** Взаимно однозначное отображение $f : M^n \to M^{n+k}$ будем называть локально плоским вложением, если для любой точки $x \in M^n \setminus \partial M^n$ существует окрестность $U \subset M^{n+k}$ точки $f(x)$ и гомеоморфизм

$$h : (R^{n+k}, R^n) \to \big(U, U \cap f(M^n)\big),$$

а для точки $x \in \partial M^n$ существует окрестность $U \subset M^{n+k}$ точки $f(x)$ и гомеоморфизм

$$h : (R_+^{n+k}, R_+^n) \to \big(U, U \cap f(M^n)\big).$$

Локальное локально плоское вложение называется локально плоским погружением.

Пусть $i : M^n \to M^{n+k}$ — локально плоское погружение, тогда с помощью предложения 4.3 [9] мы получаем в вышеуказанном смысле обобщенный микропучок $(M^n\times M^{n+k},\ M^n\times M^n,\ M^n,\ s,\ p)$ со слоем $(R^{n+k},\ R^n)$.

3. Диагональное вложение топологического $n$-мерного многообразия $M$ в $q$-кратное прямое произведение этого многообразия $W=\underbrace{M\times\ldots\times M}_{q}$ обозначим $d : M\to W$ и определим соотношением $d(x)=(x,\ \ldots,\ x)\in W$, где $x\in M$. С помощью отождествления любой точки $x\in M$ с образом $d(x)\in W$ мы тем же самым отождествляем многообразие $M$ с подмногообразием $d(M)\subset W$. Следовательно, имеем пару $(W,\ M)$.

Теперь обозначим ${}_0E_q$ множество таких путей $\omega\in W^I$, что $\omega(t)\in M$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ тогда и только тогда, когда $t=0$, т.е. множество путей в пространстве $W$, которые только начинаются в многообразии $M$. К множеству путей ${}_0E_q$ прибавляя постоянные пути $x^I$ во всех точках $x$ многообразия $M$, получаем множество $E_q$. В этом множестве $E_q$ введем компактно-открытую топологию и превратим его в топологическое пространство. Наконец, определим отображения $s_q : M\to E_q$ и $p_q : E_q\to M$ соответственно формулами $s_q(x)=x^I$ и $p_q(\omega)=\omega(0)$ где $x\in M$, $\omega\in E_q$.

Совершенно аналогично можно вместо пространства $W$ рассматривать его подпространство $W'=\underbrace{M\times\ldots\times M}_{r}\subset W$, где $0<r\leqslant q$.

**Предложение** 3.2. Пусть $M$ — $n$-мерное компактное топологическое многообразие является регулярным пространством, тогда имеет место обобщенный микропучок

$$(z,\ z')=(E_q,\ E_r,\ M,\ s_q,\ p_q),$$

слой $(F_q,\ F_r)$ которого имеет гомотопический тип $(R^{qn},\ R^{rn})$.

Доказательство. Пусть $U_i$ — любая окрестность покрытия $\{U_i\}$ базиса $M$. Тогда пару окрестностей $(V_i,\ V_i')$ определим как множества путей соответственно в $W$, $W'$, начало которых находятся в окрестности $U_i$.

Проверим коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& (V_i,\ V_i') \arrow[dr, "p_q|(V_i,\ V_i')"] \arrow[dd, dashed, "h_i"] & \\
U_i \arrow[ur, "s_q|U_i"] \arrow[dr, "q_1"'] & & U_i \\
& (U_i\times F_q,\ U_i\times F_r) \arrow[ur, "q_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Здесь гомеоморфизм $h_i$ определим формулой $h_i(\omega)=(\omega(0),\ \omega)$, т.е. любому пути $\omega\in V_i$ сопоставляем пару $(\omega(0),\ \omega)$ (начало пути $\omega(0)\in U_i$ и тот же самый путь $\omega$). Так как для любого $u\in U_i$ имеем $h_i(s_q(u))=h_i(u^I)=q_1(u)$, то

$h_i \circ s_q = q_1$, где естественное отображение $q_1$ определяется соотношением $q_1(u) = (u, u^I)$. Таким образом, левый треугольник диаграммы коммутативен. Также и правый треугольних диаграммы коммутативен, так как для любого $\omega \in V_i$ имеем

$$q_2 h_i(\omega) = q_2(\omega(0), \omega) = \omega(0) = p_q(\omega),$$

т.е. $q_2 \circ h_i = p_q$.

Теперь покажем, что пара $(F_q, F_r)$ имеет гомотопический тип пары

$$(\underbrace{R^n \times \ldots \times R^n}_{q}, \underbrace{R^n \times \ldots \times R^n}_{r}) = (R^{qn}, R^{rn}).$$

Для любой окрестности $U_i$ определим пару окрестностей

$$\tilde{U}_i = F_q \cap (\underbrace{U \times \ldots \times U_i}_{q})^I, \quad \tilde{U}_i' = F_r \cap (\underbrace{U_i \times \ldots \times U_i}_{r})^I$$

и покажем гомстопическую эквивалентность пар $(\tilde{U}_i, \tilde{U}_i') \sim (F_q, F_r)$.

Так как по предположению предложения многообразие $M$ является компактным регулярным пространством, то оно будет также и вполне регулярным [11].

Таким образом, мы можем использовать лемму 7.1 [14]. Получаем гомотопию

$$d_t : \left((F_q, F_r), (\tilde{U}_i, \tilde{U}_i')\right) \to \left((F_q, F_r), (\tilde{U}_i, \tilde{U}_i')\right), \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

которая соединяет тождественное отображение $d_0$ с отображением

$$d_1 : \left((F_q, F_r), (\tilde{U}_i, \tilde{U}_i')\right) \to \left((\tilde{U}_i, \tilde{U}_i'), (\tilde{U}_i, \tilde{U}_i')\right).$$

Тогда композиции этого отображения $d_1$ с естественным вложением

$$i : (\tilde{U}_i, \tilde{U}_i') \to (F_q, F_r)$$

и составляют отображения гомотопические тождественным:

$$i \circ d_1 \sim \text{тожд.} : (F_q, F_r) \to (F_q, F_r),$$
$$d_1 \circ i \sim \text{тожд.} : (\tilde{U}_i, \tilde{U}_i') \to (\tilde{U}_i, \tilde{U}_i').$$

Теперь покажем, что пара $(\tilde{U}_i, \tilde{U}_i')$ в свою очередь, гомотопически эквивалентна паре окрестностей

$$(\underbrace{U_i \times \ldots \times U_i}_{q}, \underbrace{U_i \times \ldots \times U_i}_{r}) = \left((U_i)_q, (U_i)_r\right).$$

Для этого определим отображение $\eta : (\tilde{U}_i, \tilde{U}_i') \to \left((U_i)_q, (U_i)_r\right)$ соответствием $\eta(\omega) = \omega(1)$, где $\omega \in \tilde{U}_i$, и отображение $\xi : \left((U_i)_q, (U_i)_r\right) \to (\tilde{U}_i, \tilde{U}_i')$ сопоставлением любой точке $\bar{u}\in(U_i)_q$, пути $\xi\in\tilde{U}_i$; который начинается в фиксированной точке $\xi(0)$ окрестности $U$ и кончается в точке $\xi(1)=\bar{u}$. Ясно, что

$$\eta\circ\xi=\text{тожд.}\ \big((U_i)_q,\ (U_i)_r\big)\to\big((U_i)_q,\ (U_i)_r\big),$$

$$\xi\circ\eta\sim\text{тожд.}\ \ (\tilde{U}_i,\ \tilde{U}_i')\to(\tilde{U}_i,\ \tilde{U}_i').$$

Так как пара $\big((U_i)_q,\ (U_i)_r\big)$, очевидно, гомеоморфна паре $(R^{qn},\ R^{rn})$, то композиция гомотопических эквивалентностей

$$(F_q,\ F_r)\sim(\tilde{U}_i,\ \tilde{U}_i')\sim\big((U_i)_q,\ (U_i)_r\big)\sim(R^{qn},\ R^{rn})$$

и осуществляет гомотопическую эквивалентность $(F_q,\ F_r)\sim(R^{qn},\ R^{rn})$. Этим предложение доказано.

Рассматривая частный случай, когда $q=1$, $r=0$, получаем следствие.

**Следствие 3.3.** Имеет место обобщенный микропучок $t=(T,\ M,\ s,\ p)$, слой $F$ которого имеет гомотопический тип пространства $R^n$.

Рассматривая другой частный случай, когда $q=2$, $r=0$, получаем следствие.

**Следствие 3.4.** Имеет место обобщенный микропучек $z_2=(E_2,\ M,\ s_2,\ p_2)$, слой $F_2$ которого имеет гомотопический тип $R^n\times R^n$.

## 4. Общее описание обобщенных микропучков

**Определение 4.1.** Отображением обобщенных микропучков

$$(x,\ x')=(E,\ E',\ B,\ s,\ p),\ (y,y')=(\bar{E},\bar{E}',\ B',\ s',\ p')$$

будем называть такую пару отображений $(f_E,f_B)$, что бы имела место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
B & \xrightarrow{s} & (E,\ E') & \xrightarrow{p} & B \\
\downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_E} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} \\
B' & \xrightarrow{s'} & (\bar{E},\ \bar{E}') & \xrightarrow{p'} & B'
\end{array}$$

**Определение 4.2.** Стандартным тривиальным обобщенным микропучком будем называть обобщенный микропучок

$$(e^q,\ e^r)=(B\times R^q,\ B\times R^r,B,\ s,\ p),$$

где $s$, $p$ соответственно естественные отображения

$$B\xrightarrow{s}(B\times R^q,\ B\times R^r)\xrightarrow{p}B.$$

**Определение 4.3.** Два обобщенных микропучка

$$(x,\ x')=(E,E',B,s,p),\ (y,y')=(\bar{E},\bar{E}',B,s',p')$$

называются изоморфными, если для образов

$$s(B)\subset E,\quad s'(B)\subset \bar{E}$$

существуют соответственно окрестности

$$(V,\ V')\subset(E,\ E'),\ (\bar{V},\ \bar{V}')\subset(\bar{E},\ \bar{E}'),$$

имеющие структуру обобщенных микропучков и, кроме того, существует такой гомеоморфизм $g$, чтобы имела место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(V,\ V') \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift right, "p"'] & (\bar{V},\ \bar{V}') \arrow[d, shift right, "p'"'] \\
B \arrow[r, "\text{тожд.}"] \arrow[u, shift right, "s"'] & B. \arrow[u, shift right, "s'"']
\end{tikzcd}$$

Изоморфизм дает отношение эквивалентности; используя его, введем следующее определение.

**Определение 4.4.** Обобщенный микропучек называется тривиальным, если он изоморфен стандартному тривиальному обобщенному микропучку.

## 5. Операции над обобщенными микропучками

Пусть $(x, x')=(E, E', B, s, p)$ и $(y, y')=(\bar{E}, \bar{E}', B, s', p')$ — два обобщенных микропучка с одной и той же базой, слоями которых являются соответственно пары $(F,\ F')$ и $(\bar{F},\ \bar{F}')$

**Определение 5.1.** Уитниевской суммой обобщенных микропучков $(x, x')$, $(y, y')$ называется обобщенный микропучок $(\tilde{E}, \tilde{E}', B, \tilde{s}, \tilde{p})$, который обозначим $(x, x')+(y, y')$ (по техническим причинам мы отказываемся от стандартного обозначения). Здесь пространства

$$\tilde{E}=\{(e,\ \bar{e})\in E\times \bar{E}_{|p(e)=p'(\bar{e})}\},$$

$$\tilde{E}'=\{(e',\ \bar{e}')\in E'\times \bar{E}'_{|p(e')=p'(\bar{e}')}\}.$$

Инъекция $\tilde{s}$ и проекция $\tilde{p}$ определяются соответственно формулами

$$\tilde{s}(b)=\Big(s(b),\ s'(b)\Big),\ \tilde{p}(e, \bar{e})=p(e)=p'(\bar{e}).$$

Слоем микропучка $(x, x')+(y, y')$ является пара $(\tilde{F}, \tilde{F}')$, где

$$\tilde{F}=F\times\bar{F},\quad \tilde{F}'=F'\times\bar{F}'.$$

Для обоснования определения 5.1 докажем следующее предложение.

**Предложение 5.2.** Уитниевская сумма $(x, x')$ + $(y, y')$ является обобщенным микропучком.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & (V_i,\ V'_i) \arrow[dd, dashed, "h_i"] \arrow[dr, "p_1(V_i,\ V'_i)"] & & (\tilde V_i,\ \tilde V'_i) \arrow[dd, dashed, "\tilde h_i"] \arrow[dr, "p"] & & (\bar V_i,\ \bar V'_i) \arrow[dd, dashed, "h'_i"] & \\
U_i \arrow[ur, "s|U_i"] \arrow[dr, "q_1"'] & & U_i \arrow[ur, "\tilde s"] \arrow[dr, "\tilde q_1"'] & & U_i \arrow[ur, "s'"] \arrow[dr, "q'_1"'] & & U_i \arrow[ul, "p'"'] \\
 & U_i \times (F, F') \arrow[ur, "q_2"'] & & U_i \times (\tilde F, \tilde F') \arrow[ur, "\tilde q_2"'] & & U_i \times (\bar F, \bar F') \arrow[ur, "q'_2"'] &
\end{tikzcd}$$

где коммутативность левого и правого „квадрата“ дает условия локальной тривиальности соответственно для обобщенных микропучков $(x,\ x')$, $(y,\ y')$.

Мы строим коммутативный средний „квадрат“, который и будем соответствовать условию локальной тривиальности уитневской суммы $(x,\ x')+(y,\ y')$.

Пару окрестностей $(\tilde V_i,\ \tilde V'_i)$ определим соотношениями

$$\tilde V_i = \{(v,\ \bar v') \in V_i \times \bar V_{i\,|\,p(v)=p'(\bar v)}\},$$

$$\tilde V'_i = \{(v',\ \bar v') \in V'_i \times \bar V'_{i\,|\,p(v')=p'(\bar v')}\},$$

а гомеоморфизм $\tilde h_i$ — формулой

$$\tilde h_i(v,\ \bar v) = \left(\tilde p(v,\ \bar v),\ \left(r_1 h_i(v),\ r_2 h'_i(\bar v)\right)\right),$$

где $(v,\bar v) \in V_i \times \bar V_i$, $r_1$, $r_2$ — естественные проекции.

$$r_1 : U_i \times F \to F,\ r_2 : U_i \times \bar F \to \bar F.$$

Еще отображения

$$\tilde q_1 : U_i \to U_i \times (\tilde F, \tilde F'),\ \tilde q_2 : U_i \times (\tilde F, \tilde F') \to U_i$$

определяются соответственно формулами

$$\tilde q_1(u) = \left(u,\ \left(r_1 q_1(u)\right),\ \left(r_2 q_2(u)\right)\right),\ \tilde q_2(u, f) = u,$$

где $u \in U_i$, $f \in \tilde F$.

Так как

$$\tilde h_i \circ \tilde s(u) = \tilde h_i\left(s(u),\ s'(u)\right) = \left(\tilde p\left(s(u),\ s'(u),\ \left(r_1 h_i(s(u)\right),\ r_2 h'_i\left(s'(u)\right)\right)\right) =$$

$$= \left(u,\ \left(r_1 q_1(u),\ r_2 q'_1(u)\right)\right) = \tilde q_1(u),$$

$$\tilde q_2 \tilde h_i(v,\ \bar v) = \tilde q_2\left(\tilde p(v,\ \bar v),\ \left(r_1 h_i(v),\ r_2 h'_i(\bar v)\right)\right) = \tilde p(v,\ \bar v),$$

то и средний „квадрат“ коммутативный. Предложение доказано.

Теперь определим композицию двух обобщенных микропучков $(x_1,\ x'_1) = (E_1, E'_1, B, s_1, p_1)$ и $(x_2,\ x'_2) = (E_2, E'_2, E_1, s_2, p_2)$, причем базой второго микропучка, служит тотальное пространство $E_1$ первого. Композицию этих микропучков обозначим

$$(x_2,\ x'_2) \circ (x_1,\ x'_1) = (E_2, E'_2,\ B,\ s_2 \circ s_1,\ p_1 \circ p_2).$$

Не представляет трудности показать, что $(x_2, x_2') \circ (x_1, x_1')$ будет обобщенный микропучек.

Эти три микропучка составляют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "s_1"] \arrow[dr, "s_2 \circ s_1"'] & (E_1, E_1') \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, dashed, "s_2"] & B \\
& (E_2, E_2') \arrow[ur, dashed, "p_1 \circ p_2"'] \arrow[d, dashed, "p_2"] & \\
& (E_1, E_1') \arrow[uur, dashed, "p_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Совершенно аналогично, как и для простых микропучков, [8] можно показать, что имеют место следующие предложения.

**Предложение 5.3.** Уитниевская сумма обобщенных микропучков $(x_1, x_1') + (x_2, x_2')$ является композицией $(\tilde{x}, \tilde{x}') \circ (x_1, x_1')$ обобщенных микропучков $(x_1, x_1')$ и $(\tilde{x}, \tilde{x}')$, где $(\tilde{x}, \tilde{x}')$ — обобщенный микропучек, индуцированный проекцией $p_1$, и обобщенным микропучком $(x_2, x_2')$, то есть имеет место соотношение

$$(\tilde{x}, \tilde{x}') \circ (x_1, x_1') = (x_1, x_1') + (x_2, x_2').$$

**Предложение 5.4.** Имеет место соотношение

$$(\tilde{x}, \tilde{x}') \circ (x_1, x_1') = (\tilde{y}, \tilde{y}') \circ (x_2, x_2'),$$

где $(\tilde{y}, \tilde{y}')$ — обобщенный микропучек индуцированный проекцией $p_2$ и обобщенным микропучком $(x_1, x_1')$.

**Следствие 5.5.** Уитниевская сумма обобщенных микропучков коммутативна.

## 6. Касательный и нормальный обобщенные микропучки

Пусть $i : M^n \to M^{n+k}$ — локально плоское вложение топологического многообразия $M^n$ в другое топологическое многообразие $M^{n+k}$.

Введем следующие обозначения: $(T_0, T_0')$ — пара множеств путей соответстенно $\omega \in (M^{n+k})^I$, $\omega' \in (M^n)^I$, которые начинаются в многообразии $M^n$ (здесь многообразие $M^n$ отождествляется с подмногообразием $i(M^n)$ и не возвращаются в свою начальную точку; $N_0$ — множество таких путей $\omega \in (M^{n+k})^I$, которые имеют только свое начало в многообразии $M^n$. Если к множествам путей $T_0$, $T_0'$, $N_0$ прибавим все постоянные пути $m^I$ во всех точках $m$ многообразия $M^n$, то получим соответственно множества путей $T$, $T'$, $N$. Наконец, в этих множествах $T$, $T'$, $N$ введем компактно-открытую топологию и превратим их в топологические пространства. Ясно, что $T'$ и $N$ являются подпространствами пространства $T$.

Определим отображения $s : M^n \to (T, T')$, $s' : M^n \to (T, N)$, $p : (T, T') \to M^n$, $p' : (T, N) \to M^n$ соответственно формулами $s(m) = m^I$, $s'(m) = m^I$, $p(\omega) = \omega(0)$, $p'(\omega) = \omega(0)$, где $m \in M^n$, $\omega \in (T, T')$ или $\omega \in (T, N)$.

Для любой точки $m \in M^n$ прообразы $p^{-1}(m)$, $(p')^{-1}(m)$ являются парами $(F, F')$, $(\mathscr{F}', F'')$, состоящими из таких путей $\omega$ соответственно $\omega \in (T, T')$, $\omega \in (T, N)$, которые начинаются в точке $m$ и $F \subset T$, $F' \subset T'$, $F'' \subset N$. Эти пары $(F, F')$, $(F, F'')$ будем называть слоями над точкой $m$.

**Предложение 6.1.** Имеет место обобщенный микропучек $(\mathfrak{T}, t) = (T, T', M^n, s, p)$, слой $(F, F')$ которого имеет гомотопический тип пары $(R^{n+k}, R^n)$.

Доказательство этого предположения аналогичное доказательству предложения 3.2.

**Предложение 6.2.** Имеет место обобщенный микропучек $(\mathfrak{T}, n) = (T, N, M^n, s', p')$, слой $(F, \mathscr{F}'')$ которого имеет гомотопический тип пары $(R^{n+k}, R^k)$.

Доказательство. С помощью следствия 3.3 мы имеем обобщенный микропучек $\mathfrak{T} = (T, M^n, s', p')$, слой $F$ которого имеет гомотопический тип пространства $R^{n+k}$. Поэтому для доказательства предложения нам достаточно убедиться, что имеет место обобщенный микропучок $(N, M^n, s', p')$, слой $F''$ которого имеет гомотопический тип пространства $R^k$.

Пусть $U_i$ – любая окрестность покрытия $M^n$. Тогда окрестность $V_i$ определим как множество путей $\omega \in N$, начало которых находится в окрестности $U_i$.

Определим в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& V_i' \arrow[dr, "p'"] \arrow[dd, "h_i"] & \\
U_i \arrow[ur, "s'"] \arrow[dr, "q_1"'] & & U_i \\
& U_i \times F'' \arrow[ur, "q_2"'] &
\end{tikzcd}$$

гомеоморфизм, $h_i$ формулой $h_i(\omega) = \big(\omega(0), i_\alpha \omega(t)\big)$, где $\omega \in V_i'$, а отображение $i_\alpha$ определяется в конце 1 параграфа, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Обратный гомеоморфизм $h_i^{-1}$ имеет вид $h_i^{!}(u, \omega)(t) = \alpha(u_0, u)\,\omega(t)$, где $u_0$, $u \in U_i$; отображение $\alpha: U_i \times \times U_i \to G(M^n)$ также определяется в 1 параграфе.

Не представляет трудности проверить коммутативность вышеуказанной диаграммы.

Теперь покажем, что слой $F''$ имеет гомотопический тип пространства $R^k$.

Обозначим $W$ окрестность фиксированной точки $u_0 \in U_i$ в многообразии $M^{n+k}$ и определим окрестность $\tilde{W}$ соотношением $\tilde{W} = F'' \cap W^I$.

Опять, используя лемму 7.1 [14] легко заключаем, что слой $F''$ гомотопически эквивалентен окрестности $\tilde{W}$.

Пусть $U_i' = U_i \cap W$, тогда пара $(W, U')$ очевидно, гомеоморфна паре $(R^{n+k}, R^n)$. Таким образом, получаем

$$W \setminus U' \cup u_0 = R^{n+k} \setminus R^n \cup O \sim R^k.$$

Теперь нам остается показать гомотопическую эквивалентность $\tilde{W} \sim \sim W \setminus U' \cup u_0$, которую определяют отображения $\eta$: $\tilde{W} \to W \setminus U' \cup u_0$, $\xi$: $W \setminus U' \cup$

10. Leid. 11663.

$\cup\, u_0 \to \tilde{W}$, заданные соответственно соответствиями $\eta(\omega)=\omega(1)$, $\xi(u)$ — путь, который начинается в фиксированной точке $u_0$ и кончается в точке $u$. Ясно, что $\eta \circ \xi = 1$ и $\xi \circ \eta \sim 1$.

Композиция гомотопических эквивалентностей

$$F'' \sim \tilde{W} \sim W \backslash U' \cup u_0 \sim R^k$$

и осуществляет гомотопическую эквивалентность $F'' \sim R^k$. Предложение доказано.

**Следствие 6.3.** В частном случае, когда $k=0$, получаем обобщенный микропучек $(T, M, s', p')$, слой $F$ которого имеет гомотопический тип $R^n$.

**Следствие 6.4.** Имеет место обобщенный микропучек $n=(N, M^n, s', p')$, слой $F''$ которого имеет гомотопический тип пространства $R^k$.

Пусть $M^n$ — некоторое топологическое подмногообразие топологического многообразия $M^{n+k}$. Мы как всегда предполагаем, что многообразия $M^n$, $M^{n+k}$ имеют счетный базис.

**Определение 6.5.** *Трубчатой окрестностью подмногообразия* $M^n$ в многообразии $M^{n+k}$ будем называть такую окрестность $U(M^n) \subset M^{n+k}$, для которой существует ретракция $j: U \to M^n$, которая с вложением $i: M^n \to U$ составляет микропучок $\bar{u}=(U, M^n, i, j)$. Этот микропучек $\bar{u}$ в дальнейшем будем называть трубчатой окрестностью подмногообразия $M^n \subset M^{n+k}$.

Ясно, что если подмногообразие $M^n$ имеет трубчатую окрестность в $M^{n+k}$, то оно является локально плоско вложенным в $M^{n+k}$. Но, с другой стороны, имеются примеры, когда топологические подмногообразия не имеют трубчатых окрестностей [2].

**Предложение 6.6.** Пусть $\bar{u}=(U, M^n, i, j)$ трубчатая окрестность подмногообразия $M^n \subset M^{n+k}$, тогда она послойно гомотопически эквивалентна в следствии 6.4 указанному обобщенному микропучку $n=(N, M^n, s', p')$.

Доказательство предложения получаем используя аналогичную теорему 4.14 [9].

**Предложение 6.7.** Пусть $M^n \to M^{n+k}$ — локально плоское вложение $n$-мерного многообразия в $(n+k)$ — мерное многообразие. Далее пусть $t=(T', M^n, s, p)$, $n=(N, M^n, s', p')$, $\mathcal{T}=(T, M^n, s, p)$ — выше определенные обобщенные микропучки соответственно со слоями $F' \sim R^n$, $F'' \sim R^k$, $F \sim R^{n+k}$. Тогда обобщенный микропучок $\mathcal{T}$ послойно гомотопически эквивалентен уитниевской сумме $t+n$.

Доказательство. Прежде всего определим для микропучка $\mathcal{T}$ накрывающую функцию $\lambda$. Пусть

$$\Omega_p = \{(\tau, \tau') \in T \times (M^n)^I{}_{|\tau'(0)=p(\tau)}\}.$$

Далее, пусть $\tilde{p}$ отображение $T^I \to \Omega_p$, которое любому пути $\tau_t(t) \in T^I$ сопоставляет пару $(\tau_t(0), p\tau_t)$. Накрывающей функцией $\lambda$ будем называть отображение $\lambda: \Omega_p \to T^I$, которое удовлетворяет условию $\tilde{p} \circ \lambda = 1_{\Omega_p}$.

С помощью теоремы униформизации Гуревича [7] нетрудно показать, что для микропучка $\mathcal{T}$ существует накрывающая функция $\lambda$ удовлетворяющая следующим условиям:

1. Для любого пути $\tau'\in(M^n)^I$, который начинается в постоянном пути $\sigma_0$, т.е. $\tau'(0)=\sigma_0(0)$, имеем постоянный путь $\lambda(\sigma_0, \tau)(t)$ равен $\tau(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

2. Если $\sigma_0\in N_0$ и $\tau'\in(M^n)^I$ такой, что $\tau'(0)=\sigma_0(0)$, то $\lambda(\sigma_0, \tau')(t)\in N_0, 0\leqslant t\leqslant 1$.

3. Если замкнутую окрестность точки $m\in M^{n+k}$ отождествим с замкнутым диском $\bar{D}^{n+k}$ так, что $\bar{D}^{n+k}\cap M^n=\bar{D}^n$ и $D^{n+k}\backslash\partial\bar{D}^{n+k}=U^{n+k}$, то для некоторого открытого в $M^n$ подмножества $W\subset U^n=U^{n+k}\cap M^n$ имеем

$$\lambda(\tau, \tau')(t)(s)=h_{U^{n+k}}\left(\tau'(t), \tau\right)(s)=\alpha\left(m, \tau'(t)\right)\tau(s),$$

где $0\leqslant t$, $s\leqslant 1$, $\tau\in F$, $\tau'\in W^I$, $\tau(0)=\tau'(0)$ и $\alpha: U^{n+k}\times U^{n+k}\to G_0(D^{n+k})$ такое отображение, что $\alpha: U^n\times U^n\to G_0^n(D^{n+k})$, здесь $G_0^n(D^{n+k})$ — группа гомеоморфизмов $D^{n+k}$, которые $D^n$ переводят в себя.

Определим теперь отображение уитниевской суммы микропучков $t+n$ в микропучок $\mathfrak{T}$ формулой

$$\psi(\tau', \sigma)(t)=\lambda(\tau', \sigma)(t)(t), \text{ где } 0\leqslant t\leqslant 1,\ \tau'\in T',\ \sigma\in N.$$

Заметим, что $p(\tau)=\tau'(0)=\sigma(0)$, где $\tau\in T$, а $p$ — проекция микропучка $\mathfrak{T}$. Если $\sigma\in N_0$, тогда и $\lambda(\tau, \sigma)(t)\in N_0$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Для $t>0$ значение функции $\lambda(\tau, \sigma)(t)(t)$ не имеет с многообразием $M^n$ общих точек и поэтому $\psi(\tau, \sigma)\in T_0$. Если $\tau'\in T_0'$ и $\sigma\in N$, то имеем постоянный путь $\psi(\tau'\sigma)=\tau'\in T_0'\subset T_0$. Таким образом, если $(\tau', \sigma)$ — точка тотального пространства уитниевской суммы $t+n$, то $\psi(\tau', \sigma)\in T_0$. Если $\tau'$ и $\sigma$ — постоянные пути, то и $\psi(\tau', \sigma)$ будет постоянным путем в точке $\tau'(0)=\sigma(0)$. Очевидно, что $p\psi(\tau', \sigma)=p^*(\tau', \sigma)$, где $p^*$ — проекция микропучка $t+n$. Слой микропучка $t+n$ обозначим $F^*$. Следовательно, $\psi$ является отображением микропучка $t+n$ в микропучек $T$.

Теперь в силу результатов [2], нам остается показать, что ограничение отображения $\psi$ на слое $F^*$ (которое обозначим $\psi_0$) является гомотопической эквивалентностью.

Пусть $m\in M^{n+k}$ тогда существует для этой точки такая окрестность $W^{n+k}\subset U^{n+k}=\bar{D}^{n+k}\backslash\partial D^{n+k}$, чтобы окрестность $W^n=W^{n+k}\cap M^n$ удовлетворяла третье условие. Пусть $W^k$ такая окрестность, полученная из $W^{n+k}$ путем приравнивания первых $n$-координат нулю. Далее определим естественные проекции $\pi_1: W^{n+k}\to W^n$, $\pi_2: W^{n+k}\to W^k$, как в первом параграфе. Кроме того, если $x\in W^{n+k}$ и $\omega(x)$ — любой путь удовлетворяющий условия $\omega(x)(0)=m$, $\omega(x)(1)=x$, тогда определим отображения $\alpha: W^{n+k}\to F^*$, $\beta: W^{n+k}\to F$ соответственно формулам $\alpha(x)=\left(\omega\left(\pi_1(x)\right), \omega\left(\pi_2(x)\right)\right)$, $\beta(x)=\omega(x)$, где $x\in W^{n+k}$.

В силу предположения 5.2 и следствий 6.3, 6.4 имеем, что $\alpha$ и $\beta$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Отображение $\psi_0$ будет гомотопической эквивалентностью, если имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
W^{n+k} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & F^* \arrow[dl, "\psi_0"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

На самом деле, пусть $x \in W^{n+k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. С помощью третьего условия имеем

$$\psi_0(\alpha(x))(t) = \lambda\Big(\omega(\pi_2(x)),\ \omega(\pi_1(x))\Big)(t)(t) =$$

$$= \alpha\big(m, t\pi_1(x)(\omega(\pi_2(x))\big)(t) = \alpha\big(m, t\pi_1(x)\big)\big(t\pi_2(x)\big) = \xi_{n+k,\,n}(tx).$$

С одной стороны заметим, что $\beta(x)(t) = tx)$, а с другой стороны не представляет трудности показать, что отображение $\xi_{n+k,\,n} \sim 1 : W^{n+k} \to W^{n+k}$ и сохраняет во время гомотопии точку $m$ (эту точку отождествляем с 0). Эту гомотопию обозначим $h_t$, где $h_0 = 1$, $h_1 = \xi_{n+k,\,n}$. С помощью гомотопии $h_t$ определим гомотопию $g_t : W^{n+k} \to F$ формулой $g_t(x, s) = h(tx, x)$, $x \in W^{n+k}$, $0 \leqslant \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$.

Ясно, что $g_0 = \beta$ и $g_1 = \psi \circ \alpha$. Следовательно, диаграмма коммутативна. Предложение доказано.

Пусть $i_1 : M^n \to M^{n+k}$ — локально плоское вложение одного топологического многообразия в другое. Далее пусть имеем еще одно локально плоское вложение $i_2 : M^{n+k} \to M^{n+k+m}$. Тогда композиция этих вложений $i = i_2 \circ i_1 : M^n \to M^{n+k+m}$ будет также локально плоским вложением.

Эти три локально плоские вложения $i_1$, $i_2$, $i$ в силу предложении 6.1 определяют соответственно обобщенные микропучки, которые обозначим $(\mathcal{T}_1, t_1) = (T_1, T_1', M^n, s_1, p_1)$, $(\mathcal{T}_2, t_2) = (T_2, T_2', M^{n+k}, s_2, p_2)$ и $(\mathcal{T}, t) = (T, T', M^n, s, p)$. Слой этих микропучков $(F_1, F_1')$ $(F_2, F_2')$ и $(F, F')$ имеют соответственно гомотопический тип пар $(R^{n+k}, R^n)$, $(R^{n+k+m}, R^{n+k})$ и $(R^{n+k+m}, R^n)$.

Следуя предложению 6.2 для этих же вложений получаем другие обобщенные микропучки, которые соответственно обозначим

$$(\mathcal{T}_1, n_1) = (T_1, N_1, M^n, s_1', p_1'),$$
$$(\mathcal{T}_2, n_2) = (T_2, N_2, M^{n+k}, s_2', p_2'),$$
$$(\mathcal{T}, n) = (T, N, M^n, s', p').$$

Слои этих микропучков $(F_1, F_1'')$, $(F_2, F_2'')$ и $(F, F'')$ имеют соответственно гомотопический тип пар $(R^{n+k}, R^k)$, $(R^{n+k+m}, R^m)$ и $(R^{n+k+m}, R^{k+m})$.

С помощью этих обобщенных мнкропучков мы получаем соответственно частные случаи обобщенных микропучков с слоями указанного гомотопического типа:

$$\mathcal{T}_1 = (T_1, M^n, s_1, p_1),\ F_1 \sim R^{n+k};$$
$$\mathcal{T}_2 = (T_2, M^{n+k}, s_2, p_2),\ F_2 \sim R^{n+k+m};$$
$$\mathcal{T} = (T, M^n, s, p),\ F \sim R^{n+k+m};$$
$$t_1 = (T_1', M^n, s_1, p_1),\ F_1' \sim R^n;$$
$$t_2 = (T_2', M^{n+k}, s_2, p_2),\ F_2' \sim R^{n+k}.$$
$$t = (T', M^n, s, p),\ F' \sim R^n;$$
$$n_1 = (N_1, M^n, s_1', p_1'),\ F_1'' \sim R^k,$$
$$n_2 = (N_2, M^{n+k}, s_2', p_2'),\ F_2'' \sim R^m;$$
$$n = (N, M^n, s', p'),\ F'' \sim R^{k+m}.$$

Очевидно, что микропучки $t_1$ и $t$ совпадают. Если ограничение микропучка $\mathcal{T}_2$ на многообразии $M^n$ обозначим $\mathcal{T}_{2\,|M^n}$, то легко проверить, что микропучки $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_{2\,|M^n}$ так же совпадают. Наконец, ограничение микропучка $t_2$ на многообразии $M^n$, которое обозначим $t_{2\,|M^n}$, также совпадает с микропучком $\mathcal{T}_1$, а микропучок $\mathcal{T}_1$, в свою очередь, является подмикропучком микропучка $\mathcal{T}_{2\,|M^n}$, тотальное пространство $T_1$ которого состоит из таких путей $\omega \in T_2$, которые начинаются в $M^n$ и не выходят из $M^{n+k}$. Микропучки $t_1$, $t$ являются аналогичными подмикропучками микропучка $t_{2\,|M^n}$.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
10.III.1970

**Литература**


1. W. Browder, Open and clased disk bundles, Ann of Math., 83 (1966), 218–230.
2. M. Brown, Locally flat imbeddings of topological manifolds, Ann. of Math, 75 (1962), 331–341.
3. A. Dold, Über fasernweise Homotopie – äquivalenz von Faserräumen, Math, Zeitshr., 62(1955), 111–136.
4. E. Fadell, On fiber homotopy equivalence, Duke Math. J., 26 (1959), 699–706.
5. E. Fadell, Generalized normal bundles for locally-flat imbeddings, Trans. Amer. Math. Soc. 114, 2 (1965), 488–513.
6. P. Holm, The microbundle representation theorem, Acta math., 117 (1967), 191–213.
7. W. Hurewicz, On the concept of fibre space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 41 (1955), 956–961.
8. А. Матузявичюс, Нестабильная полугруппа микропучков, Лит. матем. сб., **VII**, 3 (1967), 439–457.
9. K. C. Millett, Homotopy normal bundles for locally flat immersion and embeddings of topological manifolds, Ill. J. Math. 133 (1969), 564–572.
10. J. Milnor, Microbundles, Topology, 3,1 (1964), 53–80.
11. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Москва, 1954.
12. Н. Стинрод, Топология косых произведений, Москва, 1953.
13. Хи Сы-цзян, Теория гомотопий, Москва, 1964.
14. S. T. Hu, Fibrings of enveloping space, Proc. London Math. Soc., (3), 11 (1961), 691 – 707.
15. E. C. Zeeman, Unkhotting combinatorial ball, Ann. of Math., 78 (1963).


## APIBENDRINTI MIKROIŠSLUOKSNIAVIMAI IR LOKALIAI PLOKŠTI ĮDĖJIMAI

A. Matuzevičius

*(Reziumė)*

Apibendrintas mikroišsluoksniavimas yra erdvių ir atvaizdavimų komutatyvi diagrama

$$\begin{tikzcd} & (E, E') \arrow[dr, "p"] & \\ B \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "\text{tapat.}"] & & B \end{tikzcd}$$

Reikalaujama, kad egzistuotų padengianti erdvę $B$ aplinkų šeima $\{U_i\}_{i\in I}$ ir tokia erdvių dvejete $(E, E')$ aplinkų dvejetų šeima $\{V_i, V_i'\}_{i\in I}$, jog $sU_i \subset (V_i, V_i')$, $p(V_i, V_i') \subset U_i$ ir, be to, homeomorfizmų šeima $\{h_i\}_{i\in I}$, sudaranti, komutatyvią diagramą

$$\begin{tikzcd}
& (V_i, V_i') \arrow[dr, "p|(V_i, V_i')"] \arrow[dd, "h_i"] & \\
U_i \arrow[ur, "s|U_i"] \arrow[dr, "q_1"'] & & U_i \\
& U_i \times (F, F') \arrow[ur, "q_2"'] &
\end{tikzcd}$$

kur $*$ — erdvių dvejeto $(F, F')$ fiksuotas taškas; erdvių dvejetas $(F, F')$ yra euklidinių erdvių dvejeto $(R^n, R^m)$ homotopinio tipo, o atvaizdavimai $q_1$ ir $q_2$ apibrėžiami priklausomybėmis $q_1(u) = (u, *)$, $q_2(u,f) = u$, $u \in U_i$, $f \in (F, F')$.

Duodami trys tokių mikroišsluoksniavimų pavyzdžiai.

Toliau apibrėžiama apibendrintų mikroišsluoksniavimų Uitnėjo suma ir kompozicija.

Topologinių daugdarų lokaliai plokščias įdėjimas $M^n \to M^{n+k}$ apibrėžia liečiamąjį ir normalinį apibendrintą mikroišsluoksniavimą. Čia nagrinėjamos kai kurios šių mikroišsluoksniavimų savybės. Parodoma, kad apibendrintas mikroišsluoksniavimas $\mathfrak{T} = (T, M^n, s, p)$ yra homotopiškai ekvivalentinis apibendrintų mikroišsluoksniavimų $t = (T', M^n, s_1, p_1)$ ir $n = (N, M^n, s', p')$ Uitnėjo sumai.

## GENERALIZED MICROBUNDLES AND LOCALLY FLAT IMBEDDINGS

A. Matuzevičius

(*Summary*)

Generalized microbundle is a diagram commutative of maps and spaces

$$\begin{tikzcd}
& (E, E') \arrow[dr, "p"] & \\
B \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "\text{id.}"] & & B
\end{tikzcd}$$

for which the following is true: There exists a family of open sets $\{U_i\}_{i\in I}$, which is a cover of $B$, a family of pairs of open sets $\{V_i, V_i'\}_{i\in I}$ in $(E, E')$ such that $sU_i \subset (V_i, V_i')$ and $p(V_i, V') \subset U_i$ besides there exists a family of homeomorphisms $\{h_i\}_{i\in I}$ such that

$$\begin{tikzcd}
& (V_i, V_i') \arrow[dr, "p|(V_i, V_i')"] \arrow[dd, "h_i"] & \\
U_i \arrow[ur, "s|U_i"] \arrow[dr, "q_1"'] & & U_i \\
& U_i \times (F, F') \arrow[ur, "q_2"'] &
\end{tikzcd}$$

commutes, where $(F, F')$ is a pair of spaces, with fix point is homotopy equivalent to the pair $(R^n, R^m)$ of Euclidean spaces and $q_1(u)=(u, *)$, $q_2(u,f)=u$, $u \in U_i$, $f \in (F, F')$.

We consider three examples and define tangent and normal generalized microbundles for locally flat imbedding of topological manifolds $M^n \to M^{n+k}$ and verity its properties. We also prove a proposition about a homotopy equivalence of generalized microbundle $\zeta=(T, M^n, s, p)$ to the Whitney sum of generalized microbundles $t=(T', M^n, s_1, p_1)$ and $n=(N, M^n, s', p')$.