

УДК 513. 836

ОБОБЩЕННЫЕ МИКРОПУЧКИ И ЛОКАЛЬНО ПЛОСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ

А. И. Матузвявичюс

1. Предварительные понятия

В начале мы приведем некоторые обозначения, которыми будем в дальнейшем пользоваться.

Пусть R^n — действительное числовое векторное n -мерное пространство:

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\},$$

$R_+^n \subset R^n$ — полупространство пространства R^n :

$$R_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid x_i \geq 0\},$$

S^n — единичная, n -мерная сфера:

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in R_+^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

D^n — единичный, открытый, n -мерный диск:

$$D^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_+^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\},$$

замкнутый n -мерный единичный диск обозначим через \bar{D}^n . Открытый, соответственно замкнутый k -мерный диск получим так:

$$D^k = D^n \cap R^k, \quad \bar{D}^k = \bar{D}^n \cap R^k,$$

где $1 \leq k \leq n$.

Далее, пусть

$$D^{n-k} = \{y \in D^n, y_i = 0, 1 \leq i \leq k\},$$

тогда имеем естественные проекции

$$\pi_1 : D^n \rightarrow D^k, \quad \pi_2 : D^n \rightarrow D^{n-k},$$

определенные соответственно формулами

$$\pi_1(y) = \pi_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$$\pi_2(y) = \pi_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n),$$

где $y \in D^n$.

Пусть $G(R^n, 0)$ — группа гомеоморфизмов пространства R^n , сохраняющих точку $(0, 0, \dots, 0)$, а $G(R^n, R^k, 0)$ — группа гомеоморфизмов пространства R^n , которые еще подпространство $R^k \subset R^n$ переводят на себя. Эти группы рассматриваем с компактно открытой топологией и тем же самым они являются топологическими группами.

С помощью одноточечной компактификации пространства R^n получаем сферу S^n . Таким образом, полученная S^n имеет две канонически отмеченные точки: точку, в которую переходит точка $(0, 0, \dots, 0)$ и присоединенную точку. Эти точки соответственно обозначим $0, \infty \in S^n$.

Если группу гомеоморфизмов сферы S^n , которые сохраняют отмеченные точки $0, \infty$, обозначим через $G(S^n, 0, \infty)$, то в силу того, что любой гомеоморфизм пары $(R^n, 0)$ однозначно продолжается до гомеоморфизма тройки $(S^n, 0, \infty)$, с помощью леммы 1.3 [6] получаем изоморфизм топологических групп

$$G(R^n, 0) \approx G(S^n, 0, \infty).$$

Наконец, пусть $G(\bar{D}^n, \partial D^n)$ — группа таких гомеоморфизмов диска \bar{D}^n , которые точно сохраняют все точки границы ∂D^n диска \bar{D}^n .

Определим гомеоморфизм $h_n: R^n \rightarrow D^n$ формулой

$$h_n(x) = \frac{x}{1 + \|x\|},$$

где

$$x \in R^n \text{ и } \|x\| = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

обратный гомеоморфизм $g_n: D^n \rightarrow R^n$ определим формулой

$$g_n(y) = \frac{y}{1 - \|y\|},$$

где $y \in D^n$.

Еще заметим, что

$$h_k = h_n|_{R^k}: R^k \rightarrow D^k \text{ и } g_k = g_n|_{D^k}: D^k \rightarrow R^k,$$

где $0 \leq k \leq n$.

Теперь определим отображение

$$\alpha': D^n \times D^n \times \bar{D}^n \rightarrow \bar{D}^n$$

равенством

$$\alpha'(y, z, \omega) = \begin{cases} h_n(g_n(\omega) + g_n(z) - g_n(y)), & \omega \in D^n, \\ \omega, & \omega \in \partial D^n, \end{cases}$$

где $(y, z) \in D^n \times D^n$.

Такое отображение α' , в свою очередь, определяет отображение $\alpha: D^n \times D^n \rightarrow G(\bar{D}^n, \partial D^n)$ с такими свойствами:

- 1) $\alpha(y, z)(y) = z, (y, z) \in D^n \times D^n$,
- 2) $\alpha(y, y) = 1, y \in D^n$,
- 3) $\alpha(y, z)|_{\partial D^n} = 1, (y, z) \in D^n \times D^n$,
- 4) $\alpha: D^k \times D^k \rightarrow G(\bar{D}^k, \partial D^k) \subset G(\bar{D}^n, \partial D^n)$.

Определим, наконец, отображение $\beta_{n, k}: D^n \rightarrow D^n$ соотношением

$$\beta_{n, k}(y) = \alpha(0, \pi_1(y))(\pi_2(y)), y \in D^n.$$

Не представляет трудности проверить, что отображение $\beta_{n,k}$ гомотопно относительно центра тождественному отображению пар

$$(D^n, D^n \setminus 0) \rightarrow (D^n, D^n \setminus 0).$$

Теперь предположим, что M – топологическое n -мерное многообразие и возьмем в нем открытое множество $U \subset M$, замыкание которого гомеоморфно \bar{D}^n .

В силу вышеизложенного имеем отображение $\alpha : U \times U \rightarrow G(M)$, где $G(M)$ – пространство гомеоморфизмов многообразия M с компактно-открытой топологией. Отображение α удовлетворяет условиям:

- 1) $\alpha(x, y)(x) = y, (x, y) \in U \times U,$
- 2) $\alpha(x, x) = 1, x \in U,$
- 3) $\alpha(x, y)|_{M \setminus U} = 1, (x, y) \in U \times U.$

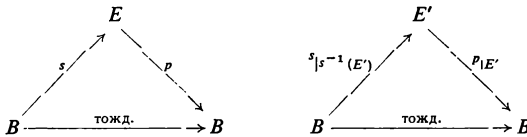
Если \bar{U} – компакт, тогда группа гомеоморфизмов множества \bar{U} , фиксированных на ∂U , является топологической группой, естественно вложенной в группу $G(M)$. Эту группу обозначим $G(U, \partial U)$.

Далее пусть отображение $i : G(M) \rightarrow G(M)$ задается соотношением $i(h) = h^{-1}$, тогда отображение $i_\alpha : U \times U \rightarrow G(M)$ будет непрерывным даже если M и не будет компактом.

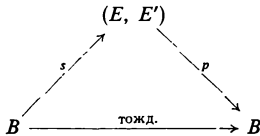
2. Понятие обобщенного микропучка

Определение 2.1. Обобщенный микропучок есть собрание следующих объектов:

- 1) пары пространств (E, E') , называемой „тотальным пространством“;
- 2) пространства B , называемого базисным пространством;
- 3) отображений s и p , составляющих коммутативные диаграммы



(сокращенно обе эти диаграммы условно будем записывать с помощью одной диаграммы)



4) пары (F, F') , называемой „слоем“, которая имеет гомотопический тип пары евклидовых пространств (R^n, R^m) ;

5) семейства окрестностей $\{U_i\}$, покрывающих все пространство B и занумерованных элементами некоторого множества I ;

б) заданного для любого i из I гомеоморфизма

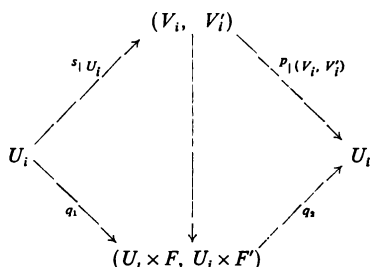
$$h_i : (V_i, V'_i) \rightarrow (U_i \times F, U_i \times F'),$$

где (V_i, V'_i) – пара окрестностей соответственно в пространствах E, E' .

Требуется при этом, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1) $sU_i \subset V_i, pV'_i \subset U_i$,

2) имеет место коммутативная диаграмма (удовлетворяется условие локальной тривиальности)



где отображения q_1 и q_2 определяются соответственно соотношениями $q_1(u) = (u, *)$, $q_2(u, x) = (u, x)$, $u \in U_i, x \in F$ (соответственно $x \in F'$), наконец, $*$ – фиксированная точка соответственно пространств F, F' .

Коротко обобщенные микропучки будем обозначать парой латинских букв, например, $(x, x') = (E, E', B, s, p)$.

Любой обобщенный микропучок (x, x') со слоем (F, F') содержит естественные обобщенные подмикропучки $x = (E, B, s, p)$ и $x' = (E', B, s, p)$ соответственно со слоями F и F' .

3. Примеры обобщенных микропучков

1. (R^n, R^m) – микропучок, где $0 \leq m \leq n$ [6].

2. Пусть M^n – n -мерное топологическое многообразие, которое является еще сепарабельным метрическим пространством. Возьмем еще другое $(n+k)$ -мерное топологическое многообразие M^{n+k} , которое, как и многообразие M^n , может быть с границей.

Определение 3.1. Взаимно однозначное отображение $f: M^n \rightarrow M^{n+k}$ будем называть локально плоским вложением, если для любой точки $x \in M^n \setminus \partial M^n$ существует окрестность $U \subset M^{n+k}$ точки $f(x)$ и гомеоморфизм

$$h : (R^{n+k}, R^n) \rightarrow (U, U \cap f(M^n)),$$

а для точки $x \in \partial M^n$ существует окрестность $U \subset M^{n+k}$ точки $f(x)$ и гомеоморфизм

$$h : (R_+^{n+k}, R_+^n) \rightarrow (U, U \cap f(M^n)).$$

Локально локально плоское вложение называется локально плоским погружением.

Пусть $i : M^n \rightarrow M^{n+k}$ — локально плоское погружение, тогда с помощью предложения 4.3 [9] мы получаем в вышеуказанном смысле обобщенный микропучок $(M^n \times M^{n+k}, M^n \times M^n, M^n, s, p)$ со слоем (R^{n+k}, R^n) .

3. Диагональное вложение топологического n -мерного многообразия M в q -кратное прямое произведение этого многообразия $W = \underbrace{M \times \dots \times M}_q$ обо-

значим $d : M \rightarrow W$ и определим соотношением $d(x) = (x, \dots, x) \in W$, где $x \in M$. С помощью отождествления любой точки $x \in M$ с образом $d(x) \in W$ мы тем же самым отождествляем многообразие M с подмногообразием $d(M) \subset W$. Следовательно, имеем пару (W, M) .

Теперь обозначим ${}_0E_q$ множество таких путей $\omega \in W^I$, что $\omega(t) \in M$ ($0 \leq t \leq 1$) тогда и только тогда, когда $t=0$, т.е. множество путей в пространстве W , которые только начинаются в многообразии M . К множеству путей ${}_0E_q$ прибавляя постоянные пути x^t во всех точках x многообразия M , получаем множество E_q . В этом множестве E_q введем компактно-открытую топологию и превратим его в топологическое пространство. Наконец, определим отображения $s_q : M \rightarrow E_q$ и $p_q : E_q \rightarrow M$ соответственно формулами $s_q(x) = x^t$ и $p_q(\omega) = \omega(0)$ где $x \in M, \omega \in E_q$.

Совершенно аналогично можно вместо пространства W рассматривать его подпространство $W' = \underbrace{M \times \dots \times M}_r \subset W$, где $0 < r \leq q$.

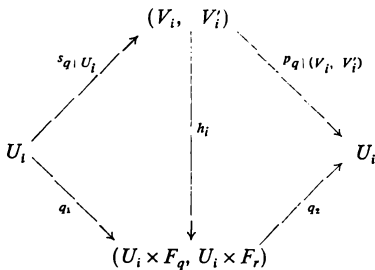
Предложение 3.2. Пусть M — n -мерное компактное топологическое многообразие является регулярным пространством, тогда имеет место обобщенный микропучок

$$(z, z') = (E_q, E_r, M, s_q, p_q),$$

слой (F_q, F_r) которого имеет гомотопический тип (R^{qn}, R^{rn}) .

Доказательство. Пусть U_i — любая окрестность покрытия $\{U_i\}$ базиса M . Тогда пару окрестностей (V_i, V'_i) определим как множества путей соответственно в W, W' , начало которых находятся в окрестности U_i .

Проверим коммутативность диаграммы



Здесь гомеоморфизм h_i определим формулой $h_i(\omega) = (\omega(0), \omega)$, т.е. любому пути $\omega \in V_i$ сопоставляем пару $(\omega(0), \omega)$ (начало пути $\omega(0) \in U_i$ и тот же самый путь ω). Так как для любого $u \in U_i$ имеем $h_i(s_q(u)) = h_i(u^t) = q_1(u)$, то

$h_i \circ s_q = q_1$, где естественное отображение q_1 определяется соотношением $q_1(u) = (u, u')$. Таким образом, левый треугольник диаграммы коммутативен. Также и правый треугольник диаграммы коммутативен, так как для любого $\omega \in V_i$ имеем

$$q_2 h_i(\omega) = q_2(\omega(0), \omega) = \omega(0) = p_q(\omega),$$

т.е. $q_2 \circ h_i = p_q$.

Теперь покажем, что пара (F_q, F_r) имеет гомотопический тип пары

$$\underbrace{(R^n \times \dots \times R^n)}_q \quad \underbrace{(R^n \times \dots \times R^n)}_r = (R^{qn}, R^{rn}).$$

Для любой окрестности U_i определим пару окрестностей

$$\tilde{U}_i = F_q \cap \underbrace{(U \times \dots \times U_i)}_q, \quad \tilde{U}'_i = F_r \cap \underbrace{(U_i \times \dots \times U_i)}_r$$

и покажем гомотопическую эквивалентность пар $(\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i) \sim (F_q, F_r)$.

Так как по предположению предложения многообразие M является компактным регулярным пространством, то оно будет также и вполне регулярным [11].

Таким образом, мы можем использовать лемму 7.1 [14]. Получаем гомотопию

$$d_1 : (F_q, F_r), (\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i) \rightarrow (F_q, F_r), (\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i), \quad (0 \leq t \leq 1),$$

которая соединяет тождественное отображение d_0 с отображением

$$d_1 : (F_q, F_r), (\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i) \rightarrow ((\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i), (\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i)).$$

Тогда композиции этого отображения d_1 с естественным вложением

$$i : (\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i) \rightarrow (F_q, F_r)$$

и составляют отображения гомотопические тождественным:

$$i \circ d_1 \sim \text{тожд.} : (F_q, F_r) \rightarrow (F_q, F_r),$$

$$d_1 \circ i \sim \text{тожд.} : (\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i) \rightarrow (\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i).$$

Теперь покажем, что пара $(\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i)$ в свою очередь, гомотопически эквивалентна паре окрестностей

$$\underbrace{(U_i \times \dots \times U_i)}_q, \quad \underbrace{(U_i \times \dots \times U_i)}_r = ((U_i)_q, (U_i)_r).$$

Для этого определим отображение $\eta : (\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i) \rightarrow ((U_i)_q, (U_i)_r)$ соответствием $\eta(\omega) = \omega(1)$, где $\omega \in \tilde{U}_i$, и отображение $\xi : ((U_i)_q, (U_i)_r) \rightarrow (\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i)$ сопо-

ставлением любой точке $\bar{i} \in (U_i)_q$, пути $\xi \in \bar{U}_i$; который начинается в фиксированной точке $\xi(0)$ окрестности U и кончается в точке $\xi(1) = \bar{i}$. Ясно, что

$$\eta \circ \xi = \text{тожд. } \left((U_i)_q, (U_i)_r \right) \rightarrow \left((U_i)_q, (U_i)_r \right),$$

$$\xi \circ \eta \sim \text{тожд. } (\bar{U}_i, \bar{U}_i) \rightarrow (\bar{U}_i, \bar{U}_i).$$

Так как пара $\left((U_i)_q, (U_i)_r \right)$, очевидно, гомеоморфна паре (R^{qn}, R^{rn}) , то композиция гомотопических эквивалентностей

$$(F_q, F_r) \sim (\bar{U}_i, \bar{U}_i) \sim \left((U_i)_q, (U_i)_r \right) \sim (R^{qn}, R^{rn})$$

и осуществляет гомотопическую эквивалентность $(F_q, F_r) \sim (R^{qn}, R^{rn})$. Этим предложение доказано.

Рассматривая частный случай, когда $q=1, r=0$, получаем следствие.

Следствие 3.3. Имеет место обобщенный микропучок $t = (T, M, s, p)$, слой F которого имеет гомотопический тип пространства R^n .

Рассматривая другой частный случай, когда $q=2, r=0$, получаем следствие.

Следствие 3.4. Имеет место обобщенный микропучок $z_2 = (E_2, M, s_2, p_2)$, слой F_2 которого имеет гомотопический тип $R^n \times R^n$.

4. Общее описание обобщенных микропучков

Определение 4.1. Отображением обобщенных микропучков

$$(x, x') = (E, E', B, s, p), (y, y') = (\bar{E}, \bar{E}', B', s', p')$$

будем называть такую пару отображений (f_E, f_B) , что бы имела место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{s} & (E, E') & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_E & & \downarrow f_B \\ B' & \xrightarrow{s'} & (\bar{E}, \bar{E}') & \xrightarrow{p'} & B' \end{array}$$

Определение 4.2. Стандартным тривиальным обобщенным микропучком будем называть обобщенный микропучок

$$(e^q, e^r) = (B \times R^q, B \times R^r, B, s, p),$$

где s, p соответственно естественные отображения

$$B \xrightarrow{s} (B \times R^q, B \times R^r) \xrightarrow{p} B.$$

Определение 4.3. Два обобщенных микропучка

$$(x, x') = (E, E', B, s, p), (y, y') = (\bar{E}, \bar{E}', B, s', p')$$

называются изоморфными, если для образов

$$s(B) \subset E, \quad s'(B) \subset \bar{E}$$

существуют соответственно окрестности

$$(V, V') \subset (E, E'), \quad (\bar{V}, \bar{V}') \subset (\bar{E}, \bar{E}'),$$

имеющие структуру обобщенных микропучков и, кроме того, существует такой гомеоморфизм g , чтобы имела место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (V, V') & \xrightarrow{g} & (\bar{V}, \bar{V}') \\ \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ p \\ \downarrow \end{array} \right\} s & & \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ p' \\ \downarrow \end{array} \right\} s' \\ B & \xrightarrow{\text{тожд.}} & B. \end{array}$$

Изоморфизм дает отношение эквивалентности; используя его, введем следующее определение.

Определение 4.4. Обобщенный микропучек называется тривиальным, если он изоморфен стандартному тривиальному обобщенному микропучку.

5. Операции над обобщенными микропучками

Пусть $(x, x') = (E, E', B, s, p)$ и $(y, y') = (\bar{E}, \bar{E}', B, s', p')$ — два обобщенных микропучка с одной и той же базой, слоями которых являются соответственно пары (F, F') и (\bar{F}, \bar{F}')

Определение 5.1. Уитниевской суммой обобщенных микропучков (x, x') , (y, y') называется обобщенный микропучок $(\bar{E}, \bar{E}', B, \bar{s}, \bar{p})$, который обозначим $(x, x') + (y, y')$ (по техническим причинам мы отказываемся от стандартного обозначения). Здесь пространства

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \{ (e, \bar{e}) \in E \times \bar{E}'_{p'(e)=p'(e)} \}, \\ \bar{E}' &= \{ (e', \bar{e}') \in E' \times \bar{E}'_{p'(e')=p'(e')} \}. \end{aligned}$$

Инъекция \bar{s} и проекция \bar{p} определяются соответственно формулами

$$\bar{s}(b) = (s(b), s'(b)), \quad \bar{p}(e, \bar{e}) = p(e) = p'(e).$$

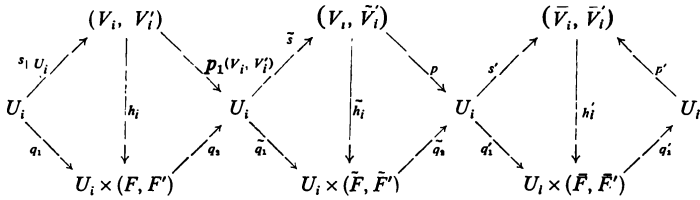
Слоем микропучка $(x, x') + (y, y')$ является пара (\bar{F}, \bar{F}') , где

$$\bar{F} = F \times \bar{F}, \quad \bar{F}' = F' \times \bar{F}'.$$

Для обоснования определения 5.1 докажем следующее предложение.

Предложение 5.2. Уитниевская сумма $(x, x') + (y, y')$ является обобщенным микропучком.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму



где коммутативность левого и правого „квадрата“ дает условия локальной тривиальности соответственно для обобщенных микропучков (x, x') , (y, y') .

Мы строим коммутативный средний „квадрат“, который и будем соответствовать условию локальной тривиальности уитневской суммы $(x, x') + (y, y')$.

Пару окрестностей (\bar{V}_i, \bar{V}_i') определим соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{V}_i &= \{ (v, \bar{v}) \in V_i \times \bar{V}_i \mid p(v) = p'(\bar{v}) \}, \\ \bar{V}_i' &= \{ (v', \bar{v}') \in V_i' \times \bar{V}_i' \mid p'(v') = p''(\bar{v}') \}, \end{aligned}$$

а гомеоморфизм \bar{h}_i — формулой

$$\bar{h}_i(v, \bar{v}) = \left(\bar{p}(v, \bar{v}), (r_1 h_i(v), r_2 h'_i(\bar{v})) \right),$$

где $(v, \bar{v}) \in V_i \times \bar{V}_i$, r_1, r_2 — естественные проекции.

$$r_1 : U_i \times F \rightarrow F, r_2 : U_i \times \bar{F} \rightarrow \bar{F}.$$

Еще отображения

$$\bar{q}_1 : U_i \rightarrow U_i \times (\bar{F}, \bar{F}'), \bar{q}_2 : U_i \times (\bar{F}, \bar{F}') \rightarrow U_i$$

определяются соответственно формулами

$$\bar{q}_1(u) = \left(u, (r_1 q_1(u), r_2 q_2(u)) \right), \bar{q}_2(u, f) = u,$$

где $u \in U_i, f \in \bar{F}$.

Так как

$$\begin{aligned} \bar{h}_i \circ \bar{s} (u) &= \bar{h}_i(s(u), s'(u)) = \left(\bar{p}(s(u), s'(u)), (r_1 h_i(s(u)), r_2 h'_i(s'(u))) \right) = \\ &= \left(u, (r_1 q_1(u), r_2 q'_1(u)) \right) = \bar{q}_1(u), \end{aligned}$$

$$\bar{q}_2 \bar{h}_i(v, \bar{v}) = \bar{q}_2 \left(\bar{p}(v, \bar{v}), (r_1 h_i(v), r_2 h'_i(\bar{v})) \right) = \bar{p}(v, \bar{v}),$$

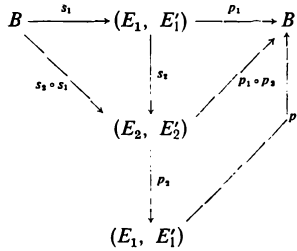
то и средний „квадрат“ коммутативный. Предложение доказано.

Теперь определим композицию двух обобщенных микропучков $(x_1, x'_1) = (E_1, E'_1, B, s_1, p_1)$ и $(x_2, x'_2) = (E_2, E'_2, E_1, s_2, p_2)$, причем базой второго микропучка, служит тотальное пространство E_1 первого. Композицию этих микропучков обозначим

$$(x_2, x'_2) \circ (x_1, x'_1) = (E_2, E'_2, B, s_2 \circ s_1, p_1 \circ p_2).$$

Не представляет трудности показать, что $(x_2, x'_2) \circ (x_1, x'_1)$ будет обобщенный микропучек.

Эти три микропучка составляют коммутативную диаграмму



Совершенно аналогично, как и для простых микропучков, [8] можно показать, что имеют место следующие предложения.

Предложение 5.3. Уитниевская сумма обобщенных микропучков $(x_1, x'_1) + (x_2, x'_2)$ является композицией $(\tilde{x}, \tilde{x}') \circ (x_1, x'_1)$ обобщенных микропучков (x_1, x'_1) и (\tilde{x}, \tilde{x}') , где (\tilde{x}, \tilde{x}') — обобщенный микропучек, индуцированный проекцией p_1 , и обобщенным микропучком (x_2, x'_2) , то есть имеет место соотношение

$$(\tilde{x}, \tilde{x}') \circ (x_1, x'_1) = (x_1, x'_1) + (x_2, x'_2).$$

Предложение 5.4. Имеет место соотношение

$$(\tilde{x}, \tilde{x}') \circ (x_1, x'_1) = (\tilde{y}, \tilde{y}') \circ (x_2, x'_2),$$

где (\tilde{y}, \tilde{y}') — обобщенный микропучек индуцированный проекцией p_2 и обобщенным микропучком (x_1, x'_1) .

Следствие 5.5. Уитниевская сумма обобщенных микропучков коммутативна.

6. Касательный и нормальный обобщенные микропучки

Пусть $i : M^n \rightarrow M^{n+k}$ — локально плоское вложение топологического многообразия M^n в другое топологическое многообразие M^{n+k} .

Введем следующие обозначения: (T_0, T'_0) — пара множеств путей соответственно $\omega \in (M^{n+k})^I$, $\omega' \in (M^n)^I$, которые начинаются в многообразии M^n (здесь многообразии M^n отождествляется с подмногообразием $i(M^n)$ и не возвращаются в свою начальную точку; N_0 — множество таких путей $\omega \in (M^{n+k})^I$, которые имеют только свое начало в многообразии M^n . Если к множествам путей T_0, T'_0, N_0 прибавим все постоянные пути m^t во всех точках m многообразия M^n , то получим соответственно множества путей T, T', N . Наконец, в этих множествах T, T', N введем компактно-открытую топологию и превратим их в топологические пространства. Ясно, что T' и N являются подпространствами пространства T .

Определим отображения $s : M^n \rightarrow (T, T')$, $s' : M^n \rightarrow (T, N)$, $p : (T, T') \rightarrow M^n$, $p' : (T, N) \rightarrow M^n$ соответственно формулами $s(m) = m^t$, $s'(m) = m^t$, $p(\omega) = \omega(0)$, $p'(\omega) = \omega(0)$, где $m \in M^n$, $\omega \in (T, T')$ или $\omega \in (T, N)$.

Для любой точки $m \in M^n$ прообразы $p^{-1}(m)$, $(p')^{-1}(m)$ являются парами (F, F') , (\mathcal{F}', F'') , состоящими из таких путей ω соответственно $\omega \in (T, T')$, $\omega \in (T, N)$, которые начинаются в точке m и $F \subset T$, $F' \subset T'$, $F'' \subset N$. Эти пары (F, F') , (F, F'') будем называть слоями над точкой m .

Предложение 6.1. Имеет место обобщенный микропучек $(\mathcal{C}, t) = (T, T', M^n, s, p)$, слой (F, F') которого имеет гомотопический тип пары (R^{n+k}, R^n) .

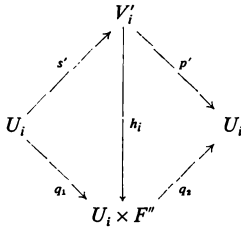
Доказательство этого предположения аналогичное доказательству предложения 3.2.

Предложение 6.2. Имеет место обобщенный микропучек $(\mathcal{C}, n) = (T, N, M^n, s', p')$, слой (F, \mathcal{F}'') которого имеет гомотопический тип пары (R^{n+k}, R^k) .

Доказательство. С помощью следствия 3.3 мы имеем обобщенный микропучек $\mathcal{C} = (T, M^n, s', p')$, слой $\{F$ которого имеет гомотопический тип пространства R^{n+k} . Поэтому для доказательства предложения нам достаточно убедиться, что имеет место обобщенный микропучок (N, M^n, s', p') , слой F'' которого имеет гомотопический тип пространства R^k .

Пусть U_i – любая окрестность покрытия M^n . Тогда окрестность V_i определим как множество путей $\omega \in N$, начало которых находится в окрестности U_i .

Определим в диаграмме



гомеоморфизм, h_i формулой $h_i(\omega) = (\omega(0), i_\alpha \omega(t))$, где $\omega \in V_i$, а отображение i_α определяется в конце 1 параграфа, $0 \leq t \leq 1$. Обратный гомеоморфизм h_i^{-1} имеет вид $h_i^{-1}(u, \omega)(t) = \alpha(u_0, u)\omega(t)$, где $u_0, u \in U_i$; отображение $\alpha : U_i \times U_i \rightarrow G(M^n)$ также определяется в 1 параграфе.

Не представляет трудности проверить коммутативность вышеуказанной диаграммы.

Теперь покажем, что слой F'' имеет гомотопический тип пространства R^k .

Обозначим W окрестность фиксированной точки $u_0 \in U_i$ в многообразии M^{n+k} и определим окрестность \tilde{W} соотношением $\tilde{W} = F'' \cap W$.

Опять, используя лемму 7.1 [14] легко заключаем, что слой F'' гомотопически эквивалентен окрестности \tilde{W} .

Пусть $U'_i = U_i \cap W$, тогда пара (W, U') очевидно, гомеоморфна паре (R^{n+k}, R^n) . Таким образом, получаем

$$W \setminus U' \cup u_0 = R^{n+k} \setminus R^n \cup O \sim R^k.$$

Теперь нам остается показать гомотопическую эквивалентность $\tilde{W} \sim W \setminus U' \cup u_0$, которую определяют отображения $\eta: \tilde{W} \rightarrow W \setminus U' \cup u_0$, $\xi: W \setminus U' \cup$

$u_0 \rightarrow \bar{W}$, заданные соответственно соответствиями $\eta(\omega) = \omega(1)$, $\xi(u)$ — путь, который начинается в фиксированной точке u_0 и кончается в точке u . Ясно, что $\eta \circ \xi = 1$ и $\xi \circ \eta \sim 1$.

Композиция гомотопических эквивалентностей

$$F^n \sim \bar{W} \sim W \setminus U' \cup u_0 \sim R^k$$

и осуществляет гомотопическую эквивалентность $F^n \sim R^k$. Предложение доказано.

Следствие 6.3. В частном случае, когда $k=0$, получаем обобщенный микропучок (T, M, s', p') , слой F которого имеет гомотопический тип R^n .

Следствие 6.4. Имеет место обобщенный микропучок $n = (N, M^n, s', p')$, слой F^n которого имеет гомотопический тип пространства R^k .

Пусть M^n — некоторое топологическое подмногообразие топологического многообразия M^{n+k} . Мы как всегда предполагаем, что многообразия M^n , M^{n+k} имеют счетный базис.

Определение 6.5. *Трубчатой окрестностью подмногообразия M^n в многообразии M^{n+k} будем называть такую окрестность $U(M^n) \subset M^{n+k}$, для которой существует ретракция $j: U \rightarrow M^n$, которая с вложением $i: M^n \rightarrow U$ составляет микропучок $\bar{u} = (U, M^n, i, j)$. Этот микропучок \bar{u} в дальнейшем будем называть трубчатой окрестностью подмногообразия $M^n \subset M^{n+k}$.*

Ясно, что если подмногообразие M^n имеет трубчатую окрестность в M^{n+k} , то оно является локально плоско вложенным в M^{n+k} . Но, с другой стороны, имеются примеры, когда топологические подмногообразия не имеют трубчатых окрестностей [2].

Предложение 6.6. Пусть $\bar{u} = (U, M^n, i, j)$ — трубчатая окрестность подмногообразия $M^n \subset M^{n+k}$, тогда она послонно гомотопически эквивалентна в следствии 6.4 указанному обобщенному микропучку $n = (N, M^n, s', p')$.

Доказательство предложения получаем используя аналогичную теорему 4.14 [9].

Предложение 6.7. Пусть $M^n \rightarrow M^{n+k}$ — локально плоское вложение n -мерного многообразия в $(n+k)$ -мерное многообразие. Далее пусть $t = (T', M^n, s, p)$, $n = (N, M^n, s', p')$, $\bar{C} = (T, M^n, s, p)$ — выше определенные обобщенные микропучки соответственно со слоями $F' \sim R^n$, $F'' \sim R^k$, $F \sim R^{n+k}$. Тогда обобщенный микропучок \bar{C} послонно гомотопически эквивалентен уитниевской сумме $t+n$.

Доказательство. Прежде всего определим для микропучка \bar{C} накрывающую функцию λ . Пусть

$$\Omega_p = \{(\tau, \tau') \in T \times (M^n)_{\tau', \tau'(0)=p(\tau)}^t\}.$$

Далее, пусть \bar{p} отображение $T' \rightarrow \Omega_p$, которое любому пути $\tau_t(t) \in T'$ сопоставляет пару $(\tau_t(0), p\tau_t)$. Накрывающей функцией λ будем называть отображение $\lambda: \Omega_p \rightarrow T'$, которое удовлетворяет условию $\bar{p} \circ \lambda = 1_{\Omega_p}$.

С помощью теоремы униформизации Гуревича [7] нетрудно показать, что для микропучка \bar{C} существует накрывающая функция λ удовлетворяющая следующим условиям:

1. Для любого пути $\tau' \in (M^n)^I$, который начинается в постоянном пути σ_0 , т.е. $\tau'(0) = \sigma_0(0)$, имеем постоянный путь $\lambda(\sigma_0, \tau')(t)$ равен $\tau(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

2. Если $\sigma_0 \in N_0$ и $\tau' \in (M^n)^I$ такой, что $\tau'(0) = \sigma_0(0)$, то $\lambda(\sigma_0, \tau')(t) \in N_0$, $0 \leq t \leq 1$.

3. Если замкнутую окрестность точки $m \in M^{n+k}$ отождествим с замкнутым диском \bar{D}^{n+k} так, что $\bar{D}^{n+k} \cap M^n = \bar{D}^n$ и $D^{n+k} \setminus \partial \bar{D}^{n+k} = U^{n+k}$, то для некоторого открытого в M^n подмножества $W \subset U^n = U^{n+k} \cap M^n$ имеем

$$\lambda(\tau, \tau')(t)(s) = h_{U^{n+k}}(\tau'(t), \tau)(s) = \alpha(m, \tau'(t))\tau(s),$$

где $0 \leq t, s \leq 1$, $\tau \in F$, $\tau' \in W^I$, $\tau(0) = \tau'(0)$ и $\alpha : U^{n+k} \times U^{n+k} \rightarrow G_0(D^{n+k})$ такое отображение, что $\alpha : U^n \times U^n \rightarrow G_0^n(D^{n+k})$, здесь $G_0^n(D^{n+k})$ — группа гомеоморфизмов D^{n+k} , которые D^n переводят в себя.

Определим теперь отображение уитниевской суммы микропучков $t+n$ в микропучок \mathcal{C} формулой

$$\psi(\tau', \sigma)(t) = \lambda(\tau', \sigma)(t)(t), \text{ где } 0 \leq t \leq 1, \tau' \in T', \sigma \in N.$$

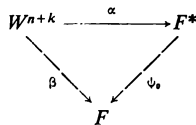
Заметим, что $p(\tau) = \tau'(0) = \sigma(0)$, где $\tau \in T$, а p — проекция микропучка \mathcal{C} . Если $\sigma \in N_0$, тогда и $\lambda(\tau, \sigma)(t) \in N_0$, $0 \leq t \leq 1$. Для $t > 0$ значение функции $\lambda(\tau, \sigma)(t)(t)$ не имеет с многообразием M^n общих точек и поэтому $\psi(\tau, \sigma) \in T_0$. Если $\tau' \in T'_0$ и $\sigma \in N$, то имеем постоянный путь $\psi(\tau', \sigma) = \tau' \in T'_0 \subset T_0$. Таким образом, если (τ', σ) — точка тотального пространства уитниевской суммы $t+n$, то $\psi(\tau', \sigma) \in T_0$. Если τ' и σ — постоянные пути, то и $\psi(\tau', \sigma)$ будет постоянным путем в точке $\tau'(0) = \sigma(0)$. Очевидно, что $p\psi(\tau', \sigma) = p^*(\tau', \sigma)$, где p^* — проекция микропучка $t+n$. Слой микропучка $t+n$ обозначим F^* . Следовательно, ψ является отображением микропучка $t+n$ в микропучек T .

Теперь в силу результатов [2], нам остается показать, что ограничение отображения ψ на слое F^* (которое обозначим ψ_0) является гомотопической эквивалентностью.

Пусть $m \in M^{n+k}$ тогда существует для этой точки такая окрестность $W^{n+k} \subset U^{n+k} = \bar{D}^{n+k} \setminus \partial D^{n+k}$, чтобы окрестность $W^n = W^{n+k} \cap M^n$ удовлетворяла третьему условию. Пусть W^k такая окрестность, полученная из W^{n+k} путем приравнивания первых n -координат нулю. Далее определим естественные проекции $\pi_1 : W^{n+k} \rightarrow W^n$, $\pi_2 : W^{n+k} \rightarrow W^k$, как в первом параграфе. Кроме того, если $x \in W^{n+k}$ и $\omega(x)$ — любой путь удовлетворяющий условия $\omega(x)(0) = m$, $\omega(x)(1) = x$, тогда определим отображения $\alpha : W^{n+k} \rightarrow F^*$, $\beta : W^{n+k} \rightarrow F$ соответственно формулам $\alpha(x) = (\omega(\pi_1(x)), \omega(\pi_2(x)))$, $\beta(x) = \omega(x)$, где $x \in W^{n+k}$.

В силу предположения 5.2 и следствий 6.3, 6.4 имеем, что α и β являются гомотопическими эквивалентностями.

Отображение ψ_0 будет гомотопической эквивалентностью, если имеет место коммутативная диаграмма



На самом деле, пусть $x \in W^{n+k}$, $0 \leq t \leq 1$. С помощью третьего условия имеем

$$\begin{aligned} \psi_0(\alpha(x))(t) &= \lambda(\omega(\pi_2(x)), \omega(\pi_1(x)))(t) = \\ &= \alpha(m, t\pi_1(x))(\omega(\pi_2(x))(t) = \alpha(m, t\pi_1(x))(t\pi_2(x)) = \xi_{n+k, n}(tx). \end{aligned}$$

С одной стороны заметим, что $\beta(x)(t) = tx$, а с другой стороны не представляется трудностью показать, что отображение $\xi_{n+k, n} \sim 1 : W^{n+k} \rightarrow W^{n+k}$ и сохраняет во время гомотопии точку m (эту точку отождествляем с 0). Эту гомотопию обозначим h_t , где $h_0 = 1$, $h_1 = \xi_{n+k, n}$. С помощью гомотопии h_t определим гомотопию $g_t : W^{n+k} \rightarrow F$ формулой $g_t(x, s) = h(tx, x)$, $x \in W^{n+k}$, $0 \leq s \leq t \leq 1$.

Ясно, что $g_0 = \beta$ и $g_1 = \psi \circ \alpha$. Следовательно, диаграмма коммутативна. Предложение доказано.

Пусть $i_1 : M^n \rightarrow M^{n+k}$ — локально плоское вложение одного топологического многообразия в другое. Далее пусть имеем еще одно локально плоское вложение $i_2 : M^{n+k} \rightarrow M^{n+k+m}$. Тогда композиция этих вложений $i = i_2 \circ i_1 : M^n \rightarrow M^{n+k+m}$ будет также локально плоским вложением.

Эти три локально плоские вложения i_1, i_2, i в силу предложения 6.1 определяют соответственно обобщенные микропучки, которые обозначим $(\mathcal{C}_1, i_1) = (T_1, T'_1, M^n, s_1, p_1)$, $(\mathcal{C}_2, i_2) = (T_2, T'_2, M^{n+k}, s_2, p_2)$ и $(\mathcal{C}, i) = (T, T', M^n, s, p)$. Слой этих микропучков (F_1, F'_1) , (F_2, F'_2) и (F, F') имеют соответственно гомотопический тип пар (R^{n+k}, R^n) , (R^{n+k+m}, R^{n+k}) и (R^{n+k+m}, R^n) .

Следуя предложению 6.2 для этих же вложений получаем другие обобщенные микропучки, которые соответственно обозначим

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_1, n_1) &= (T_1, N_1, M^n, s'_1, p'_1), \\ (\mathcal{C}_2, n_2) &= (T_2, N_2, M^{n+k}, s'_2, p'_2), \\ (\mathcal{C}, n) &= (T, N, M^n, s', p'). \end{aligned}$$

Слои этих микропучков (F_1, F'_1) , (F_2, F'_2) и (F, F') имеют соответственно гомотопический тип пар (R^{n+k}, R^k) , (R^{n+k+m}, R^m) и (R^{n+k+m}, R^{k+m}) .

С помощью этих обобщенных микропучков мы получаем соответственно частные случаи обобщенных микропучков с слоями указанного гомотопического типа:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= (T_1, M^n, s_1, p_1), F_1 \sim R^{n+k}; \\ \mathcal{C}_2 &= (T_2, M^{n+k}, s_2, p_2), F_2 \sim R^{n+k+m}; \\ \mathcal{C} &= (T, M^n, s, p), F \sim R^{n+k+m}; \\ t_1 &= (T'_1, M^n, s_1, p_1), F'_1 \sim R^n; \\ t_2 &= (T'_2, M^{n+k}, s_2, p_2), F'_2 \sim R^{n+k}; \\ t &= (T', M^n, s, p), F' \sim R^n; \\ n_1 &= (N_1, M^n, s'_1, p'_1), F''_1 \sim R^k; \\ n_2 &= (N_2, M^{n+k}, s'_2, p'_2), F''_2 \sim R^m; \\ n &= (N, M^n, s', p'), F'' \sim R^{k+m}. \end{aligned}$$

Очевидно, что микропучки t_1 и t совпадают. Если ограничение микропучка $\tilde{\mathcal{C}}_2$ на многообразии M^n обозначим $\tilde{\mathcal{C}}_{2, M^n}$, то легко проверить, что микропучки $\tilde{\mathcal{C}}$ и $\tilde{\mathcal{C}}_{2, M^n}$ так же совпадают. Наконец, ограничение микропучка t_2 на многообразии M^n , которое обозначим t_{2, M^n} , также совпадает с микропучком $\tilde{\mathcal{C}}_1$, а микропучок $\tilde{\mathcal{C}}_1$, в свою очередь, является подмикропучком микропучка $\tilde{\mathcal{C}}_{2, M^n}$, тотальное пространство T_1 которого состоит из таких путей $\omega \in T_2$, которые начинаются в M^n и не выходят из M^{n+k} . Микропучки t_1, t являются аналогичными подмикропучками микропучка t_{2, M^n} .

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 10.III.1970

Л и т е р а т у р а

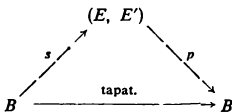
1. W. Browder, Open and clased disk bundles, Ann of Math., 83 (1966), 218–230.
2. M. Brown, Locally flat imbeddings of topological manifolds, Ann. of Math, 75 (1962), 331–341.
3. A. Dold, Über fasernweise Homotopie – äquivalenz von Faserräumen, Math, Zeitschr., 62(1955), 111–136 .
4. E. Fadell, On fiber homotopy equivalence, Duke Math. J., 26 (1959), 699–706.
5. E. Fadell, Generalized normal bundles for locally-flat imbeddings, Trans. Amer. Math. Soc. 114, 2 (1965), 488–513.
6. P. Holm, The microbundle representation theorem, Acta math., 117 (1967), 191–213.
7. W. Hurewicz, On the concept of fibre space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 41 (1955), 956–961.
8. А. Матузевичюс, Нестабильная полугруппа микропучков, Лит. матем. сб., VII, 3 (1967), 439–457.
9. K. C. Millett, Homotopy normal bundles for locally flat immersion and embeddings of topological manifolds, Ill. J. Math. 133 (1969), 564–572.
10. J. Milnor, Microbundles, Topology, 3,1 (1964), 53–80.
11. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Москва, 1954.
12. Н. Стинрод, Топология косых произведений, Москва, 1953.
13. Хи Сы-цзян, Теория гомотопий, Москва, 1964.
14. S. T. Hu, Fibrings of enveloping space, Proc. London Math. Soc., (3), 11 (1961), 691–707.
15. E. C. Zeeman, Unkhotting combinatorial ball, Ann. of Math., 78 (1963).

APIBENDRINTI MIKROIŠSLUOKSNIIVIMAI IR LOKALIAI PLOKŠTI IDĖJIMAI

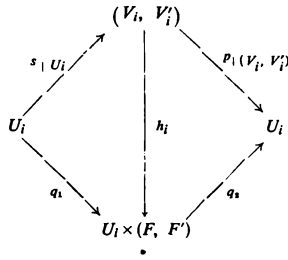
A. Matuzevičius

(Reziumė)

Apibendrintas mikroišsluoksniavimas yra erdvių ir atvaizdavimų komutatyvi diagrama



Reikalaujama, kad egzistuotų padengianti erdvę B aplinkų šeima $\{U_i\}_{i \in I}$ ir tokia erdvių dvejetainė (E, E') aplinkų dvejetainė šeima $\{V_i, V'_i\}_{i \in I}$, jog $sU_i \subset (V_i, V'_i)$, $p(V_i, V'_i) \subset U_i$ ir, be to, homeomorfizmų šeima $\{h_i\}_{i \in I}$, sudaranti, komutatyvią diagramą



kur $*$ – erdvių dvejetainio (F, F') fiksuotas taškas; erdvių dvejetainis (F, F') yra euklidinių erdvių dvejetainio (R^n, R^m) homotopinio tipo, o atvaizdavimai q_1 ir q_2 apibrėžiami priklausomybėmis $q_1(u) = (u, *)$, $q_2(u, f) = u$, $u \in U_i$, $f \in (F, F')$.

Duodami trys tokių mikroišluoksniavimų pavyzdžiai.

Toliau apibrėžiama apibendrintų mikroišluoksniavimų Uitnėjo suma ir kompozicija.

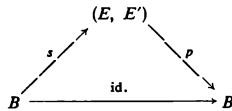
Topologinių daugdarų lokaliai plokščias įdėjimas $M^n \rightarrow M^{n+k}$ apibrėžia liečiamąjį ir normalinį apibendrintą mikroišluoksniavimą. Čia nagrinėjamos kai kurios šių mikroišluoksniavimų savybės. Parodoma, kad apibendrintas mikroišluoksniavimas $\mathcal{C} = (T, M^n, s, p)$ yra homotopiškai ekvivalentinis apibendrintų mikroišluoksniavimų $t = (T', M^n, s', p')$ ir $n = (N, M^n, s', p')$ Uitnėjo sumai.

GENERALIZED MICROBUNDLES AND LOCALLY FLAT IMBEDDINGS

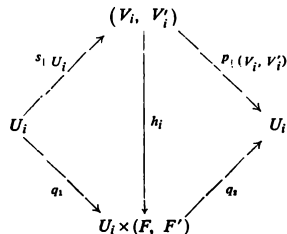
A. Matuzevičius

(Summary)

Generalized microbundle is a diagram commutative of maps and spaces



for which the following is true: There exists a family of open sets $\{U_i\}_{i \in I}$, which is a cover of B , a family of pairs of open sets $\{V_i, V'_i\}_{i \in I}$ in (E, E') such that $sU_i \subset (V_i, V'_i)$ and $p(V_i, V'_i) \subset U_i$ besides there exists a family of homeomorphisms $\{h_i\}_{i \in I}$ such that



commutes, where (F, F') is a pair of spaces, with fix point is homotopy equivalent to the pair (R^n, R^m) of Euclidean spaces and $q_1(u) = (u, a)$, $q_2(u, f) = u$, $u \in U$, $f \in (F, F')$.

We consider three examples and define tangent and normal generalized microbundles for locally flat imbedding of topological manifolds $M^n \rightarrow M^{n+k}$ and verify its properties. We also prove a proposition about a homotopy equivalence of generalized microbundle $\widetilde{C} = (T, M^n, s, p)$ to the Whitney sum of generalized microbundles $t = (T', M^n, s_1, p_1)$ and $n = (N, M^n, s', p')$.

