УДК–517.5

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Ш. И. СТРЕЛИЦ

В теории Вимана–Валирона [1] найдены асимптотические соотношения для производных целой функции при больших значениях модуля последней. В нашей работе [6] показано, что такие же соотношения имеют место и для производных одного класса неоднозначных фунцкий. Настоящая работа посвящена изучению асимптотики типа Вимана–Валирона для производных от функции, аналитической в полуплоскости и ограниченной на каждой прямой, параллельной границе. Из излагаемых ниже результатов вытекают связи, установленные Виманом и Валироном, не только для целых трансцендентных функций, но и для одного обширного класса неоднозначных функций. Найденные результаты в случае абсолютно сходящихся во всей плоскости рядов Дирихле мы выражаем затем в терминах центрального индекса.

В нашем изложении нам понадобится приводимое ниже предложение, являющееся следствием теоремы Р. Неванлинны [4] (его вывод повторяет с очевидными модификациями доказательство аналогичного факта в [6]).

Лемма А. *Пусть $h(x)>0$ — неубывающая, непрерывная справа функция на полуоси $x>0$ с $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\infty$, а $\alpha>0$ — произвольное постоянное число. Вне некоторого множества интервалов $E=E(\alpha)$ конечной меры (число интервалов множества E на каждом ограниченном сегменте конечно) верно неравенство*:

$$|h(x+d)-h(x)|<\sqrt{h(x)\ln^{1+\alpha}h(x)}$$

при

$$d\leqslant\frac{1}{\sqrt{h(x)\ln^{1+\alpha}h(x)}}\,.$$

§ 1. Соотношения для аналитической функции в полуплоскости при больших значениях ее модуля

1. Аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Reel} z>0$ принадлежит классу π, если ее модуль удовлетворяет условию:

$$S(x)=S(x,f)=\sup_{-\infty<y<\infty}|f(x+iy)|<\infty;\quad z=x+iy,\qquad x>0. \qquad (1.1)$$

Теорема 1. *Функция* $\ln S(x)$, $x>0$ *есть выпуклая функция от* x [2]

Доказательство. В полосе $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1<\infty$ функция $f(z)$ в силу условия (1.1) ограничена. По теореме Фрагмена—Линделефа $|f(z)|$ достигает свою верхнюю грань в указанной полосе на ее границе. Точнее:

$$\sup_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|f(x+iy)|=\sup_{\substack{x=x_0,\\ x=x_1.}}|f(x+iy)|. \tag{2.1}$$

Это означает, что

$$S(x)\leqslant \sup_{x_0\leqslant x\leqslant x_1} S(x)=\max\Big(S(x_0),\quad S(x_1)\Big). \tag{3.1}$$

Доказательство теоремы проводится с учетом этого замечания проторенным путем. Построим функцию $g(z)=f(z)e^{-\lambda z}$, где λ — положительное постоянное, которое определим ниже. Очевидно,

$$|g(z)|=|f(z)|e^{-\lambda x};\qquad x=\mathrm{Reel}\,z,$$

так что (см. (1.1))

$$S(x,g)=S(x,f)e^{-\lambda x}.$$

Определим сейчас число λ так, чтобы выполнялось соотношение:

$$\ln S(x_0,g)=\ln S(x_1,g),$$

т. е.

$$\ln S(x_0,f)-\lambda x_0=\ln S(x_1,f)-\lambda x_1.$$

Отсюда немедленно находим требуемое значение λ:

$$\lambda=\frac{\ln S(x_1,f)-\ln S(x_0,f)}{x_1-x_0}. \tag{4.1}$$

Применим теперь неравенство (3.1) к функции $g(z)$. Имеем:

$$S(x,g)=S(x,f)e^{-\lambda x}\leqslant S(x_1,f)e^{-\lambda x_1}$$

при $x_0<x\leqslant x_1$. Прологарифмировав последнее неравенство и подставив вместо λ ее значение из (4.1), получим:

$$\ln S(x,f)\leqslant\frac{(x_1-x)\ln S(x_0,f)+(x-x_0)\ln S(x_1,f)}{x_1-x_0}.$$

Последнее неравенство и выражает условие выпуклости функции $\ln S(x,f)$ по x.

Теорема доказана.

Из этой теоремы извлечен три следствия-свойства, общие всем выпуклым функциям (см., например, [5]).

Следствие 1. $\ln S(x)$ *есть непрерывная и монотонная, начиная с некоторого* $x\geqslant x_0$, *функция.*

Следствие 2. $\ln S(x)$ *имеет в каждой точке конечные производные справа и слева, причем почти всюду производные. Производную справа от* $\ln S(x)$ *мы обозначаем через* $L(x)$:

$$L(x)=L(x,f)=\frac{S'(x)}{S(x)};\qquad S(x)=S(x,f). \tag{5.1}$$

Следствие 3. $L(x)$, *как производная справа от выпуклой функции* $\ln S(x)$, *не убывает. Какое бы ни было число* h *справедливо неравенство:*

$$L(x)h\leqslant\ln S(x+h)-\ln S(x)\leqslant L(x+h)h. \tag{6.1}$$

2. Во всем настоящем и следующем параграфах мы будем изучать функции класса π, для которых

$$\lim_{x\to\infty} L(x)=\infty. \tag{1.2}$$

Мы этого не будем оговаривать особо.

Пусть $f(z)\in\pi$, а w — точка на прямой $\operatorname{Reel} z=x$, в которой

$$|f(w)|\geqslant L^{-\beta(x)}(x)S(x), \tag{2.2}$$

где $\beta(x)$ — произвольная функция с

$$0\leqslant\beta(x)\leqslant q<\frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим функцию

$$\frac{f(w+\eta)}{f(w)}e^{-L(x)\eta}=1+\sum_{j=1}^{\infty}A_j\eta^j;\qquad \eta=\tau+i\sigma, \tag{4.2}$$

где, очевидно, ряд справа сходится при $|\eta|<\operatorname{Reel} w=x$. Имеем:

$$\left|\frac{f(w+\eta)}{f(w)}e^{-L(x)\eta}\right|\leqslant L^{\beta(x)}(x)\frac{S(x+\tau)}{S(x)}e^{-L(x)\tau}=$$

$$=L^{\beta(x)}(x)\exp\{\ln S(x+\tau)-\ln S(x)-L(x)\tau\}$$

и в согласии с (6.1) —

$$\left|\frac{f(w+\eta)}{f(w)}e^{-L(x)\eta}\right|\leqslant L^{\beta(x)}(x)\exp\{[L(x+\tau)-L(x)]\tau\}.$$

По лемме А при

$$|\tau|\leqslant\frac{1}{\sqrt{L\ln^{1+\alpha}L}};\quad L=L(x)$$

с произвольной постоянной $\alpha>0$, вне некоторого множества интервалов $E=E(\alpha)$ конечной меры на полуоси $x>0$, верно неравенство:

$$|L(x+\tau)-L(x)|<\sqrt{L(x)\ln^{1+\alpha}L(x)}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{f(w+\eta)}{f(w)}e^{-L(x)\eta}\right|<eL^{\beta(x)}(x). \tag{5.2}$$

Теорема 2. *Пусть* $f(z)\in\pi$, $\lim\limits_{x\to\infty} L(x)=\infty$ *и* $\{x\}$*— множество точек, в которых*

$$|f(w)|\geqslant L^{-\beta(x)}(x)S(x);\quad \operatorname{Reel} w=x;\quad \beta(x)\leqslant q<\frac{1}{2}.$$

В этих условиях вне некоторого множество интервалов конечной меры $E=E(\alpha)$ *функция* $f(w+\eta)$ *в круге*

$$|\eta|\leqslant\frac{L^{-\beta(x)}(x)}{4\sqrt{L(x)\ln^{1+\alpha}L(x)}};\qquad \alpha=\mathrm{const} \tag{6.2}$$

в нуль не обращается.

Доказательство. Перепишем ряд (4.2) следующим образом:

$$g(\eta)=\frac{f(w+\eta)}{f(w)}e^{-L(x)\eta}-1=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\eta^j. \tag{7.2}$$

В соответствии с оценкой (5.2) в круге $|\eta| \leqslant [L(x) \ln^{1+\alpha} L(x)]^{-\frac{1}{2}}$ вне некоторого множества интервалов $E = E(\alpha)$ конечной меры

$$\left| \frac{f(w+\eta)}{f(w)} e^{-L(x)\eta} - 1 \right| < eL^{\beta(x)}(x) + 1. \tag{8.2}$$

Отсюда по известной лемме Шварца в круге, указанном выше, функция $g(\eta)$ оценивается так:

$$|g(\eta)| < (eL^{\beta(x)} + 1) \sqrt{L \ln^{1+\alpha} L} \, |\eta| \leqslant 4L^{\beta(x)} \sqrt{L \ln^{1+\alpha} L} \, |\eta|; \quad L = L(x).$$

Из (6.2) вытекает теперь следующее соотношение:

$$\left| \frac{f(w+\eta)}{f(w)} e^{-L(x)\eta} \right| = |1 + g(\eta)| \geqslant 1 - |g(\eta)| > 0.$$

Теорема доказана.

3. Нашей ближайшей целью является оценка производных

$$\frac{d^j}{dz^j} \ln f(w).$$

Имеет место теорема.

Теорема 3. *Пусть* $f(z) \in \pi$, $\lim\limits_{x \to \infty} L(x) = \infty$ *и* $\{w\}$ — *множество точек, в которых*

$$|f(w)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x) S(x), \quad \text{Reel}\, w = x, \quad \beta(x) \leqslant q < \frac{1}{2}.$$

Тогда, вне некоторого множества интервалов E конечной меры на полуоси $x > 0$, справедливы неравенства:

$$\left| \frac{d^j}{dz^j} \ln f(w) \right| < 2 \cdot 4^j \cdot j! \left(1 + \beta(x) \ln L(x)\right) L^{j\left(\frac{1}{2} + \beta(x)\right)}(x) \ln^{\frac{1+\alpha}{2} j} L(x);$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.3}$$

Кроме того,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{L(x)} \frac{f'(w)}{f(w)} = 1. \tag{2.3}$$

Доказательство. Ряд

$$\ln f(w+\eta) - \ln f(w) - L(x)\eta = \left[\frac{f'(w)}{f(w)} - L(x)\right] \eta +$$
$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \ln f(w) \eta^j \tag{3.3}$$

сходится, как это следует из теоремы 2, при $x > x_0$ в круге

$$|\eta| \leqslant \frac{1}{4L^{\frac{1}{2} + \beta(x)}(x) \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} L(x)}. \tag{4.3}$$

Далее, в согласии с (5.2)

$$\text{Reel} \left\{ \ln \left[\frac{f(w+\eta)}{f(w)} e^{-L(x)\eta} \right] \right\} =$$
$$= \ln \left| \frac{f(w+\eta)}{f(w)} e^{-L(x)\eta} \right| \leqslant 1 + \beta(x) \ln L(x). \tag{5.3}$$

Для оценки коэффициентов ряда (3.3) воспользуемся следующим известным фактом (см., например, [3]).

Пусть ряд

$$F(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

сходится в круге $|z|<R$, *в котором*

$$\mathrm{Reel}\, F(z)\leqslant u.$$

В этих условиях имеет место оценка:

$$|a_j|\leqslant \frac{2(U-\mathrm{Reel}\, a_0)}{R^j}; \qquad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6.3}$$

Применим теперь неравенства (6.3) к ряду (3.3). Заметив, что $a_0=0$, на основании (5.3) в круге (4.3) находим:

$$\left|\frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}\ln f(w)\right|<2\cdot 4^j\left(1+\beta(x)\ln L\right)L^{\left(\frac{1}{2}+\beta(x)\right)j}\times$$
$$\times\ln^{\frac{1+\alpha}{2}j}L; \qquad j=2,\ 3,\ \ldots \tag{7.3}$$

и

$$\left|\frac{1}{L(x)}\frac{f'(w)}{f(w)}-1\right|<4\left(1+\beta(x)\ln L\right)\frac{\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}L}{L^{\frac{1}{2}-\beta(x)}}; \quad L=L(x). \tag{8.3}$$

Неравенства (7.3) совпадают с оценками (1.3), а (8.3) — с передельным равенством (2.3). В самом деле,

$$\left|\frac{1}{L(x)}\frac{f'(w)}{f(w)}-1\right|<4\left(1+\beta(x)\ln L\right)\frac{\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}L}{L^{\frac{1}{2}-\beta(x)}}\leqslant$$
$$\leqslant 4(1+q\ln L)\frac{\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}L}{L^{\frac{1}{2}-q}}\underset{\substack{x\to\infty\\ x\notin E}}{\longrightarrow}0,$$

так как $q<\frac{1}{2}$ и $L=L(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty$.

Теорема доказана.

4. Наряду с (3.3) рассмотрим еще ряд

$$f(w+\eta)=f(w)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}f^{(j)}(w)\eta^j. \tag{1.4}$$

Выразим сейчас функции $f^{(j)}(w)$ через выражения $\frac{d^i}{dz^i}\ln f(w)$. Из (3.3) вытекает следующее тождество:

$$f(w+\eta)=f(w)\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}\ln f(w)\,\eta^j\right\}=$$
$$=f(w)\sum_{m=0}^{\infty}A^m\eta^m. \tag{2.4}$$

Здесь коэффициенты A_m, как нетрудно видеть, следующего вида:

$$A_m=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_q}B_{i_1i_2\ldots i_q}\prod_{p=1}^{q}\left(\frac{d^p}{dz^p}\ln f(w)\right)^{i_p}+\frac{1}{m!}\left(\frac{f'(w)}{f(w)}\right)^m, \tag{3.4}$$

где суммирование проводится по всем целым неотрицательным $i_1, i_2, \ldots, i_q$, для которых $\Sigma p i_p = m$; $i_p < m$; $B_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ — постоянные числа. Сравнивая ряды (1.4) и — (2.4), замечаем, что

$$A_m f(w) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(w).$$

Следовательно,

$$\frac{f^{(m)}(w)}{f(w)} = m! \sum_{\Sigma p i_p = m;\ i_p \leqslant m-1} B_{i_1 i_2 \ldots i_q} \prod_p \left(\frac{d^p \ln f(w)}{dz^p}\right)^{i_p} + \left(\frac{f'(w)}{f(w)}\right)^m. \quad (4.4)$$

С помощью соотношения (4.4) докажем теперь следующее предложение.

Теорема 4 (*типа Вимана—Валирона*). *Пусть* $f(z) \in \pi$; $\lim\limits_{x\to\infty} L(x) = \infty$ *и* $\{w\}$ *— множество точек, в которых*

$$|f(w)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x) S(x); \quad \mathrm{Reel}\, w = x,$$

где $\beta(x) : \beta(x) \leqslant q < \frac{1}{2}$ *— произвольная функция. В этих условиях имеют место следующие предельные равенства:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{L^j(x)} \frac{f^{(j)}(w)}{f(w)} = 1; \qquad j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \quad (5.4)$$

где при переходе к пределу следует, быть может, пропустить некоторое множество интервалов полуоси $x > 0$ конечной меры.

Доказательство. Предельное равенство (2.3) в теореме 3 доказывает, что соотношения (5.4) верны при $j = 1$ ($x \notin E$). Отсюда следует, что

$$\left|\frac{d \ln f(w)}{dz}\right| = \left|\frac{f'(w)}{f(w)}\right| < C_1 L(x); \qquad x \notin E, \quad (6.4)$$

где $C_1 > 0$ — некоторая постоянная. Оценим сейчас произведение в сумме (4.4). Имеем:

$$\prod_{\Sigma p i_p = m;\ i_p \leqslant m-1} \left(\frac{d^p \ln f(w)}{dz^p}\right)^{i_p} =$$

$$= \left(\frac{d \ln f(w)}{dz}\right)^{i_1} \prod_{\Sigma p i_p = m - i_1;\ i_p \leqslant m-1;\ p>1} \left(\frac{d^p \ln f(w)}{dz^p}\right)^{i_p}. \quad (7.4)$$

На основании оценок теоремы 3 и оценки (6.4) из (7.4) находим (полагаем: $2 \cdot 4^p p! = C_p$; $L = L(x)$):

$$\prod{}^* = \prod \left|\frac{d^p \ln f(w)}{dz^p}\right|^{i_p} <$$

$$< C_1^{i_1} L^{i_1} \prod_{\Sigma p i_p = m - i_1;\ i_p < m;\ p>1} C_p^{i_p} \left(1 + \beta(x) \ln L\right)^{i_p} \left(L^{\frac{1}{2}+\beta(x)} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} L\right)^{p i_p} =$$

$$= \left(\prod_{\Sigma p i_p = m,\ i_p < m} C_p^{i_p}\right) \left(L^{i_1 + \left(\frac{1}{2}+\beta(x)\right) \sum\limits_{p\neq 1} p i_p} \ln^{\frac{1+\alpha}{2} \sum\limits_{p\neq 1} p i_p} L\right) \left(1 + \beta(x) L\right)^{\Sigma i_p}.$$

Вспомним теперь, что $\beta(x) \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}$. Значит,

$$i_1 + \left(\frac{1}{2} + \beta(x)\right) \sum_{p \neq 1} p i_p \leqslant i_1 + \left(\frac{1}{2} + q\right) \sum_{p \neq 1} p i_p =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - q\right) i_1 + \left(\frac{1}{2} + q\right) \left(\sum_{p \neq 1} p i_p + i_1\right) = \left(\frac{1}{2} - q\right) i_1 + \left(\frac{1}{2} + q\right) \sum_{p \neq 1} p i_p.$$

Но $\Sigma p i_p = m$. Поэтому

$$i_1 + \left(\frac{1}{2} + \beta(x)\right) \sum_{p \neq 1} p i_p \leqslant \left(\frac{1}{2} - q\right) i_1 + \left(\frac{1}{2} + q\right) m.$$

Обозначим $\Pi C_p^{i_p} = C'$. Теперь из выражения Π^* на основании последней оценки выводим:

$$\prod{}^* < C' (1 + q \ln L)^m L^{\left(\frac{1}{2} - q\right) i_1 + \left(\frac{1}{2} + q\right) m} \ln^{\frac{1+\alpha}{2} m} L$$

и так как $i_1 \leqslant m - 1$, то

$$\prod{}^* = \prod_{\Sigma p i_p = m,\ i_p < m} \left| \frac{d^p \ln f(w)}{dz^p} \right|^{i_p} < C' L^{\left(\frac{1}{2} - q\right)(m-1) + \left(\frac{1}{2} + q\right) m} (1 + q \ln L)^m \times$$

$$\times \ln^{\frac{1+\alpha}{2} m} L < C'' L^{m - \frac{1}{2} + q} \ln^{\frac{3+\alpha}{2} m} L,$$

где $L = L(x)$ и $C'' > 0$ — некоторая постоянная, удовлетворяющая неравенству $C'' > C' \left(\frac{1}{2} + q\right)^m$. Подставив полученную для Π^* оценку в (4.4), легко устанавливаем:

$$\sigma = \left| \sum_{\substack{\Sigma p i_p = m \\ i_p < m}} B_{i_1 \ldots i_q} \prod_p \left(\frac{d^p \ln f(w)}{dz^p} \right)^{i_p} \right| <$$

$$< C L^{m + q - \frac{1}{2}} \ln^{\frac{3+\alpha}{2} m} L; \quad L = L(x); \quad x \notin E$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \notin E}} \frac{\sigma}{L^m(x)} \leqslant C \lim_{x \to \infty} \frac{\ln^{\frac{3+\alpha}{2} m} L(x)}{L^{\frac{1}{2} - q}(x)} = 0, \tag{8.4}$$

в силу того, что $\lim\limits_{x \to \infty} L(x) = \infty$, и $q < \frac{1}{2}$. Разделим теперь равенство (4.4) на $L^m(x)$ и перейдем к пределу при $x \to \infty$. С учетом соотношений (2.3) и (8.4) получаем:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \notin E}} \frac{f^{(m)}(w)}{f(w)} \cdot \frac{1}{L^m(x)} = \lim_{\substack{x \to \infty \\ x \notin E}} \left(\frac{f'(w)}{f(w)} \cdot \frac{1}{L(x)} \right)^m = 1,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Соотношения типа Вимана—Валирона для функций класса П при больших значениях модулей ее производных

5. В предыдущем параграфе мы показали, что соотношения (5.4) имеют место на множестве точек $\{w\}$, в которых справедливо неравенство

$$|f(w)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x) S(x, f), \quad \operatorname{Re} w = x; \quad \beta(x) \leqslant q < \frac{1}{2}.$$

Ниже мы покажем, что те же соотношения (5.4) верны вне некоторого множества интервалов полуоси $x > 0$ конечной меры E на множестве точек $\{w\}$, в которых модуль производной $f^{(j)}(w)$ удовлетворяет неравенству

$$|f^{(j)}(w)| \geqslant L^{j-\beta(x)}(x, f) S(x, f), \quad \operatorname{Reel} w = x \tag{1.5}$$

$\left(f(z) \in \pi, \ \lim\limits_{x \to \infty} L(x) = \infty, \ \beta(x) \leqslant q < \frac{1}{2}\right)$. Такие точки существуют. Действительно, по теореме 4 на множестве точек $\{w^*\}$, в которых

$$|f(w^*)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x, f) S(x, f), \quad \operatorname{Reel} w^* = x,$$

имеем:

$$|f^{(j)}(w^*)| = \left(1 + o(1)\right) L^j(x, f) |f(w^*)| \geqslant \left(1 + o(1)\right) L^{j-\beta(x)}(x) S(x, f).$$

Последнее неравенство совпадает с (1.5).

Итак, рассмотрим далее точки, в которых верно (1.5). Представим сейчас функцию $f(z)$ интегралом Коши в круге с центром в точке w и радиуса τ:

$$f^{(j)}(w) = \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(t)}{(t-w)^{j+1}} \, dt.$$

Имеем:

$$|f^{(j)}(w)| \leqslant \frac{j! \max\limits_{|\eta|=\tau} |f(w+\eta)|}{\tau^j}. \tag{4.5}$$

В силу (1.5) отсюда вытекает, что при $\tau = \dfrac{1}{L(x)}$

$$\max_{|\eta|=\tau} |f(w+\eta)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x) S(x, f). \tag{5.5}$$

Далее в согласии с (6.1)

$$S(x, f) \geqslant S(x+\tau, f) \, e^{-L(x+\tau)\tau}.$$

По следствию 2 из теоремы 1 функция $L(x)$ выпуклая, так что к ней применима лемма А, по которой при $\tau = \dfrac{1}{L(x)}$, $x \notin E^*$; $\operatorname{mes} E^* < \infty$

$$L(x+\tau) < L(x) + \sqrt{L(x) \ln^{1+\alpha} L(x)} = \left(1 + o(1)\right) L(x).$$

Положим теперь

$$|f(w+\eta^*)| = \max_{|\eta|=\tau} |f(w+\eta)|, \quad |\eta^*| = \tau.$$

Неравенство (5.5) в соответствии с (6.5) дает нам сейчас:

$$|f(w+\eta^*)| \geqslant \left(1 + o(1)\right) e L^{-\beta(x)}(x+\tau^*) S(x+\tau^*); \quad \tau^* = \operatorname{Re} \eta^*.$$

Последнее соотношение показывает, что в точке $w^* = w + \eta^*$ справедлива формула (5.3), т. е. при $|\operatorname{Re} \tilde{\eta}| = |\tau| = \dfrac{1}{L(x)}$

$$\max_{|\eta|=\tau} |f(w+\eta)| = |f(w+\eta^*)| \leqslant |f(w+\eta^*+\tilde{\eta})| \, e^{L(x+\tau^*+\tilde{\tau})\tilde{\tau}}.$$

В частности при $\tilde{\eta}=-\eta^*$; $\tilde{\tau}=\operatorname{Re}\tilde{\eta}=-\operatorname{Re}\eta^*=-\tau^*$

$$|f(w+\eta^*)|\leqslant|f(w)|e^{L(x)\cdot\frac{1}{L(x)}}=e|f(w)|.$$

Из (5.5) окончательно получаем:

$$|f(w)|\geqslant\frac{1}{e}\,L^{-\beta(x)}(x)S(x,\,f);\qquad \beta(x)\leqslant q<\frac{1}{2}.$$

Следовательно вне некоторого множества интервалов $\tilde{E}$ полуоси $x>0$ конечной меры верны условия теоремы 4, а значит и формулы (5.4).

Нами, таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $f(z)\in\pi$ с $\lim\limits_{x\to\infty}L(x,\,f)=\infty$ и $\{w\}$ – множество точек, в каждой из которых выполнено хотя бы одно из неравенств*

$$|f^{(j)}(w)|\geqslant L^{j-\beta(x)}(x,\,f)\,S(x,\,f);\quad \operatorname{Re}w=x;\quad j=0,\,1,\,\dots,\,m,\tag{7.5}$$

где $\beta(x)$ $\left(\beta(x)\leqslant q<\frac{1}{2}\right)$ – произвольная функция.

В этих условиях справедливы соотношения:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\notin E_m}}\frac{1}{L^p(x,\,f)}\,\frac{f^{(p)}(w)}{f(w)}=1,\qquad p=1,\,2,\,3,\,\dots$$

где E_m – некоторое множество интервалов полуоси $x>0$ конечной меры.

Замечание. Справедливо следующее утверждение: если функция $f(z)\in\pi$, то и производная $f'(z)\in\pi$. Действительно, из интеграла типа Коши для производной:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt,$$

где C – круг с центром в точке z и радиуса ρ, получаем:

$$|f'(z)|\leqslant\frac{S(x+\rho)}{\rho}<\infty;\qquad x=\operatorname{Re}z.$$

6. **Теорема 6.** *Пусть $f(z)\in\pi$ с $\lim\limits_{x\to\infty}L(x,f)=\infty$. Имеют место следующие асимптотические равенства:*

$$S(x,\,f^{(j)})=\Bigl(1+o(1)\Bigr)\,L^j(x,\,f)\,S(x,\,f);\qquad j=1,\,2,\,3,\,\dots,\quad x\notin E_j,$$

где E_j – то же множество интервалов, что и в теореме 5.

Доказательство. Пусть $\{\zeta\}$ – множество точек, в которых

$$|f(\zeta)|=L^{-\beta(x)}(x,\,f)\,S(x,\,f);\quad \operatorname{Re}\zeta=x,\tag{1.6}$$

причем $\beta(x)$ функция, для которой

$$\lim_{x\to\infty}\beta(x)\ln L(x,\,f)=0.$$

По теореме 5

$$\frac{f^{(j)}(\zeta)}{f(\zeta)}=\Bigl(1+o(1)\Bigr)\,L^j(x,\,f);\quad x\notin E_j;\quad \operatorname{Re}\zeta=x.$$

В согласии с (1.6) отсюда делаем вывод, что

$$S(x,\,f^{(j)})\geqslant\Bigl(1+o(1)\Bigr)\,L^j(x,\,f)\,S(x,\,f).\tag{2.6}$$

В предыдущем пункте (см. замечание) мы установили, что $f^{(j)}(z)\in\pi$. Поэтому существуют множество точек $\{\zeta^*\}$ со свойством:

$$f^{(j)}(\zeta^*)=L^{-\beta(x)}(x,\ f)\,S(x,\ f^{(j)}),$$

причем

$$\lim_{x\to\infty}\beta(x)\ln L(x,f)=0.$$

Но в таких точках справедлива теорема 5 и формулы (7.5):

$$f^{(j)}(\zeta^*)=\Big(1+o(1)\Big)\,L^j(x,\ f)f(\zeta^*);\quad \operatorname{Re}\zeta^*=x;\quad x\notin E_j.$$

Отсюда

$$S(x,\ f^{(j)})\leqslant\Big(1+o(1)\Big)\,L^j(x,\ f)\,S(x,\ f),$$

что вместе с (2.6) доказывает теорему.

7. Рассмотрим целую трансцендентную функцию $f(z)$. Заменой $z=e^{\xi}$; $\xi=s+it$ мы сводим функцию $f(z)$ к функции $g(\xi)=f(e^{\xi})$, принадлежащей классу π в полуплоскости $\operatorname{Re}\xi>0$. Обозначим

$$M(r)=M(r,\ f)=\max_{|z|=r}|f(z)| \tag{1.7}$$

и

$$K(r)=K(r,\ f)=\frac{rM'(r)}{M(r)}, \tag{2.7}$$

где $M'(r)$ — производная справа от $M(r)$. Так как $z=e^{\xi}$, то $r=e^{\operatorname{Re}\xi}=e^{s}$, т. е. при отображении $z=e^{\xi}$ окружность $|z|=r$ переходит одновременно во множество E^* конечной меры полуоси $s>0$ переходит совокупность E на луче $r>0$ конечной логарифмической меры, т. е. для E

$$\int_E\frac{dt}{t}<\infty.$$

Действительно, заменой $r=e^x$ получаем:

$$\int_{E^*}dt=\int_E\frac{dt}{t}.$$

Заметив далее, что

$$S(s,\ g)=M(e^s,\ f),$$

находим:

$$S'(s,\ g)=e^sM'(e^s,\ f)$$

и

$$K(r,\ f)=\frac{rM'(r,\ f)}{M(r,\ f)}=\frac{e^sM'(e^s,\ f)}{M(e^s,\ f)}=\frac{S'(s,\ g)}{S(s,\ g)}=L(s,\ g). \tag{3.7}$$

Для целой трансцендентной функции всегда

$$\lim_{r\to\infty}K(r)=\infty,$$

так как противоположные предположение

$$K(r)=\frac{rM'(r)}{M(r)}<a<\infty$$

(конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{r\to\infty}K(r)$ всегда существует) приводит к невозможному для целой трансцендентной функции неравенству

$$\ln M(r)<\ln M(r_0)+a(\ln r-\ln r_0).$$

Это замечание показывает в согласии с (3.7), что $\lim\limits_{s\to\infty} L(s, g)=\infty$. Заметим, наконец очевидное тождество: $g'(\xi)=zf'(z)$.

Сказанное позволяет легко перефразировать все приведенные в предыдущих параграфах теоремы для целых трансцендентных функций $f(z)$ при исчерпании комплексной плоскости кругами $|z|<r$. Так, например, простым следствием теоремы 6 является следующее предложение.

Теорема 7. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция. Вне некоторого множества интервалов E конечной логарифмической меры* $\left(\text{т. е. } \int\limits_E \frac{dt}{t}<\infty\right)$ *на полуоси $r>0$ имеет место соотношения:*

$$M(r, f^{(j)})=\left(1+o(1)\right) K^j(r, f)\, r^{-j} M(r, f).$$

Этим примером мы ограничиваем рассмотрение асимптотических свойств целых функций, которые широко известны (см., например, [1]).

§ 3. О связи функции $L(x)$ с центральным показателем ряда Дирихле

8. В теории Вимана—Валирона основную роль играет центральный индекс и максимальный член тейлоровского разложения. В случае функции класса π в общем случае эти понятия отсутствуют. Здесь мы выясним связь, существующую между функцией $L(x)$, построенной для функции $f(z)$ класса π, представимой абсолютно сходящимся во всей конечной плоскости рядом Дирихле, с центральным показателем последнего.

Пусть

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{\lambda_j z} \tag{1.8}$$

абсолютно сходящийся во всей конечной плоскости ряд Дирхле, для которого:

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots; \quad \lambda_n\uparrow\infty. \tag{2.8}$$

Легко видеть, что $f(z)\in\pi$. Действительно, при $x=\mathrm{Re}\, z$

$$|f(z)|\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\, e^{\lambda_j x}<\infty$$

и сумма последнего ряда от $y=\mathrm{Im}\, z$ не зависит.

Максимальный член $\mu(x)$ ряда (1.8) определяется так:

$$\mu(x)=\max_{1\leqslant j<\infty} |a_j|\, e^{\lambda_j x}. \tag{3.8}$$

Буквально также, как это делается в случае степенных рядов, доказывается тот факт, что значение $\mu(x)$ при данном x достигается не более, чем при конечном числе значений индекса $j: j=j_1, j_2, \ldots, j_k$. Число $\nu(x)$ мы называем центральным индексом и обозначаем через $\nu(x)$, а $\lambda(x)=\lambda_{\nu(x)}$ — центральным показателем. Таким образом,

$$\mu(x)=|a_{\nu(x)}|\, e^{\lambda_{\nu(x)} x}=|a_{\nu(x)}|\, e^{\lambda(x) x}. \tag{4.8}$$

Отметим еще, что, как и в случае степенного ряда*), $\lim\limits_{x\to\infty} \nu(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \mu(x)=\infty$. Нашей целью является доказательство асимптомического равенства

$$L(x)=\Big(1+o(1)\Big)\ \nu(x).$$

9. Предварительно приведем доказательство следующего почти очевидного утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $f(z)$ — *целая функция, заданная рядом* (1.8), *удовлетворяющим условию* (2.8). *Имеет место неравенство*:

$$\mu(x,f)\leqslant S(x,f).$$

Доказательство. Умножим равенство (1.8) на $e^{-\lambda_m z}$ и проинтегрируем при постоянном x по y:

$$\int\limits_{-T}^{T} f(z)e^{-\lambda_m z}\,dy=\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{(\lambda_j-\lambda_m)x}\int\limits_{-T}^{T} e^{i(\lambda_j-\lambda_m)y}\,dy. \tag{1.9}$$

Имеем $(\lambda_j\neq\lambda_m)$:

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} e^{i(\lambda_j-\lambda_m)y}\,dy=\frac{1}{T}\,\frac{1}{\lambda_j-\lambda_m}\,\sin(\lambda_j-\lambda_m)T$$

и

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} e^{i(\lambda_j-\lambda_m)y}\,dy=\begin{cases}0; & j\neq m;\\ 1; & j=m.\end{cases}$$

Далее,

$$\left|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(z)e^{-\lambda_m z}\,dy\right|\leqslant e^{-\lambda_m x}S(x,f).$$

Отсюда и из (1.9) получаем:

$$|a_m|\,e^{\lambda_m x}\leqslant S(x,f).$$

Последнее неравенство имеет место при любом m, так что

$$\mu(x)=\max_m\{|a_m|\,e^{\lambda_m x}\}\leqslant S(x,f). \tag{2.9}$$

Имеет место и следующая лемма.

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$\ln\mu(x)-\ln\mu(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}\lambda(x)\,dx. \tag{3.9}$$

Доказательство этого факта почти дословно повторяет вывод соответствующего утверждения в случае центрального индекса и максимального члена целой функции и мы его опускаем.

Из последней леммы немедленно следует, что $\ln\mu(x)$ является выпуклой функцией от x, откуда, в частности, вытекает, неравенство:

$$\lambda(x)\,h\leqslant\ln\mu(x+h)-\ln\mu(x)\leqslant\lambda(x+h)\,h. \tag{4.9}$$

*) Не сводящегося к многочлену.

10. **Лемма 3.** *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция, заданная рядом* (1.8), *удовлетворяющая условию* (2.8). *Пусть, далее,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0. \tag{1.10}$$

Справедливо неравенство:

$$S(x,\ f)\leqslant\left\{\mu(x)\,h\int\limits_0^\infty K(x,\ t,\ h)\,n(t)\,dt\right\}\exp\left\{\frac{\lambda(x)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda(x)}\right\}, \tag{2.10}$$

где $\alpha>0$ — *произвольная постоянная,* $x\notin E$, $\operatorname{mes}E<\infty$,

$$K(x,\ t,\ h)=\begin{cases}-e^{-(\lambda(x)-t)\,h}, & t<\lambda(x);\\ e^{-(t-\lambda(x))\,h}, & t\geqslant\lambda(x),\end{cases} \tag{3.10}$$

$\lambda(x)$ — *центральный показатель ряда* (1.8), $n(t)$ — *число членов последовательности показателей* $\{\lambda_n\}$, *не превосходящих* t *и*

$$h=\frac{1}{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)}\cdot \tag{4.10}$$

Доказательство. Заметим сначала, что условие (1.10) эквивалентно соотношению

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln n(t)}{t}=0. \tag{5.10}$$

Действительно, по определению функции $n(t)$ $n(t)=j$ в полузамкнутом интервале $\lambda_j\leqslant t<\lambda_{j+1}$, в котором

$$\frac{\ln n(t)}{t}\leqslant\frac{\ln n(\lambda_j)}{\lambda_j}=\frac{\ln j}{\lambda_j}\cdot \tag{6.10}$$

С другой стороны множество предельных значений выражения $\frac{\ln m}{\lambda_m}$ при $m\to\infty$ принадлежит множеству предельных значений отношения $\frac{\ln n(t)}{t}$ при $t\to\infty$. Последнее вместе с (6.10) доказывает справедливость нашего утверждения.

Пусть $\lambda(x)$ — центральный показатель ряда (1.8). Имеем:

$$\sigma_1=\sum_{j=\nu(x)+1}^{\infty}|a_j|\,e^{\lambda_j x}=\sum_{j=\nu(x)+1}^{\infty}|a_j|\,e^{\lambda_j(x+h)}\cdot e^{-\lambda_j h};\quad h>0.$$

Заметив, что $|a_j|\exp\{\lambda_j(x+h)\}\leqslant\mu(x+h)$ из предыдущего равенства выводим:

$$\sigma_1\leqslant\mu(x+h)\sum_{j=\nu(x)+1}^{\infty}e^{-\lambda_j h}=\mu(x+h)\int\limits_{\lambda_{\nu(x)}}^{\infty}e^{-th}\,dn(t)=$$

$$=\mu(x+h)\left\{e^{-th}\,n(t)\Big|_{\lambda(x)}^{\infty}+h\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}\,n(t)\,dt\right\}\cdot$$

В силу условия (1.10) $n(t)=\exp\{\varepsilon(t)\,t\}$ с $\varepsilon(t)\underset{t\to 0}{\to}0$. Поэтому

$$0\leqslant e^{-th}\,n(t)=e^{-t\,(h-\varepsilon(t))}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t\left(h-\varepsilon(t)\right)}=0.$$

Вернемся к выражению σ_1. Вспомнив, что $n\left(\lambda(x)\right)=\nu(x)$ $\left(\nu(x)\right.$ — центральный индекс$\left.\right)$, находим:

$$\sigma_1\leqslant\mu(x+h)\left\{-\nu(x)e^{-\lambda(x)h}+h\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt\right\}=$$

$$=\mu(x+h)e^{-\lambda(x)h}\left\{he^{\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt-\nu(x)\right\}.$$

По неравенству (4.9)

$$\mu(x+h)\leqslant\mu(x)e^{\lambda(x+h)h},\quad\{\lambda(x+h)=\lambda_{\nu(x+h)}\},$$

так что

$$\sigma_1\leqslant\mu(x)e^{[\lambda(x+h)-\lambda(x)]h}\left\{he^{\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt-\nu(x)\right\}. \tag{7.10}$$

Применим к функции $\ln^{1+\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)$ лемму А. Мы находим:

$$\left|\ln^{1+\frac{\alpha}{4}}\lambda(x+d)-\ln^{1+\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)\right|<1;\quad x\notin E';\quad \operatorname{mes}E'<\infty \tag{8.10}$$

при

$$|d|=\frac{1}{\ln^{1+\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)\ln^{1+\alpha}\ln^{1+\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)}>\frac{1}{\ln^{1+\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)},\quad\alpha>0.$$

По теореме о конечных приращениях из (8.10) получаем:

$$|\lambda(x+d)-\lambda(x)|\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)\frac{\ln^{\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)}{\lambda(x)}<1$$

и

$$|\lambda(x+d)-\lambda(x)|<\frac{\lambda(x)}{\ln^{\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)};\quad x\notin E'. \tag{9.10}$$

Применяя последнюю оценку, из (7.10) устанавливаем:

$$\sigma_1\leqslant\mu(x)\exp\left\{\frac{\lambda(x)}{\ln^{\frac{3}{4}+\alpha}\lambda(x)}\right\}\left\{he^{\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt-\nu(x)\right\};$$

$$h=\frac{1}{\ln^{1+\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)}. \tag{10.10}$$

Оценим сейчас сумму

$$\sigma_2=\sum_{j=1}^{\nu(x)}|a_j|e^{\lambda_j x}.$$

Имеем:

$$\sigma_2=\sum_{j=1}^{\nu(x)}|a_j|e^{\lambda_j(x-h)}\cdot e^{\lambda_j h}\leqslant\mu(x+h)\sum_{j=1}^{\nu(x)}e^{\lambda_j h}=\mu(x+h)\int_0^{\lambda(x)}e^{th}\,dn(t)=$$

$$=\mu(x-h)\left\{e^{\lambda(x)h}n\big(\lambda(x)\big)-h\int_0^{\lambda(x)}e^{th}n(t)\,dt\right\}=$$

$$=\mu(x-h)e^{\lambda(x)h}\left\{\nu(x)-he^{-\lambda(x)h}\int_0^{\lambda(x)}e^{th}n(t)\,dt\right\};\quad h>0.$$

Но по (4.9)

$$\mu(x-h)\leqslant e^{-h\lambda(x-h)}\mu(x)$$

и, следовательно,

$$\sigma_2\leqslant\mu(x)e^{[\lambda(x)-\lambda(x-h)]h}\left\{\nu(x)-he^{-\lambda(x)h}\int_0^{\lambda(x)}e^{th}n(t)\,dt\right\}.$$

По (9.10) при $h=\ln^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\lambda(x)$ находим:

$$\lambda(x)-\lambda(x-h)<\frac{\lambda(x)}{\ln^{\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)};\quad x\notin E,\ \operatorname{mes}E<\infty$$

и

$$\sigma_2\leqslant\mu(x)e^{\frac{\lambda(x)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda(x)}}\left\{\nu(x)-he^{-\lambda(x)h}\int_0^{\lambda(x)}e^{th}n(t)\,dt\right\};$$

$$h=\frac{1}{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)}.\qquad(11.10)$$

Из (7.10) и (11.10) для ряда (1.8) получаем:

$$|f(z)|\leqslant\sigma_1+\sigma_2\leqslant\mu(x)e^{\frac{\lambda(x)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda(x)}}\,h\left\{e^{\lambda(x)h}\int_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt-e^{-\lambda(x)h}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\lambda(x)}e^{th}n(t)\,dt\right\}=h\mu(x)e^{\frac{\lambda(x)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda(x)}}\int_0^{\infty}K(t,\ x,\ h)n(t)\,dt,$$

где

$$K(t,\ x,\ h)=\begin{cases}-e^{-(\lambda(x)-t)h}; & t<\lambda(x),\\ e^{-(t-\lambda(x))h}; & t\geqslant\lambda(x),\end{cases}$$

что и требовалось доказать.

11. Докажем теперь следующее предложение о связи между функцией $L(x)$ и центральным индексом ряда (1.8).

Теорема 8. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_je^{\lambda_j z}\qquad(1.11)$$

ряд Дирихле, сходящийся во всей плоскости $|z|<\infty$, *причем*

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots;\ \lambda_n\uparrow\infty. \tag{2.11}$$

Пусть, далее, существует такое постоянное положительное число α, *что*

$$\frac{\ln n}{\lambda_n}\ln^{1+\alpha}\lambda_n<1. \tag{3.11}$$

Тогда

$$L(x,\ f)=\Big(1+o\,(1)\Big)\,\lambda\,(x,\ f);\ \ x\notin E, \tag{4.11}$$

где E — *некоторое множество интервалов конечной меры на луче* $x>0$.

Доказательство. На основании леммы 1 и (2.10) легко выводим:

$$\ln\mu\,(x+d)-\left\{\ln\mu\,(x)+\ln h+\frac{\lambda\,(x)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda\,(x)}+\ln\int\limits_0^\infty K(t,\ x,\ h)\,n\,(t)\,dt\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\ln S\,(x+d)-\ln S\,(x)\leqslant\ln\mu\,(x+d)+\ln h+\frac{\lambda\,(x+d)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda\,(x+d)}+$$

$$+\ln\int\limits_0^\infty K\,(t,\ x+d,\ h)\,n\,(t)\,dt-\ln\mu\,(x),$$

где $n\,(t)$ — число членов последовательности $\{\lambda_j\}$, не превосходящее t. В соответствии с (6.1) отсюда получаем:

$$L(x)\,d\leqslant\ln S\,(x+d)-\ln S\,(x)\leqslant\ln\mu\,(x+d)-\ln\mu\,(x)+\ln h+$$

$$+\frac{\lambda\,(x+d)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda\,(x+d)}+\ln\int\limits_0^\infty K(t,\ x+d,\ h)\,n\,(t)\,dt \tag{5.11}$$

и

$$L\,(x+d)\,d\geqslant\ln S\,(x+d)-\ln S\,(x)\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{\lambda\,(x)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda\,(x)}-\ln h-\ln\int\limits_0^\infty K(t,x,h)\,n\,(t)\,dt+$$

$$+\ln\mu\,(x+d)-\ln\mu\,(x). \tag{6.11}$$

Оценим теперь входящий в последние неравенства интеграл. По формуле (3.10) находим:

$$\int\limits_0^\infty K(t,\ x,\ h)\,n\,(t)\,dt\leqslant e^{\lambda\,(x)\,h}\int\limits_{\lambda\,(x)}^\infty e^{-th}\,n\,(t)\,dt.$$

Так как в согласии с (3.11)

$$\ln n\,(t)<\frac{t}{\ln^{1+\alpha}t},$$

то

$$\int\limits_0^\infty K(t,\ x,\ h)\,n\,(t)\,dt\leqslant e^{\lambda\,(x)\,h}\int\limits_{\lambda\,(x)}^\infty e^{-t\left(h-\frac{1}{\ln^{1+\alpha}t}\right)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant e^{\lambda\,(x)\,h}\int\limits_{\lambda\,(x)}^\infty e^{-t\left(h-\frac{1}{\ln^{1+\alpha}\lambda\,(x)}\right)}\,dt=$$

$$=\frac{e^{-\lambda\,(x)\,h}}{h-\dfrac{1}{\ln^{1+\alpha}\lambda\,(x)}}\;e^{-t\left(h-\frac{1}{\ln^{1+\alpha}\lambda\,(x)}\right)}\Bigg|_{\lambda\,(x)}^{\infty}.$$

Далее по (4.10)

$$h - \frac{1}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)} = \frac{1}{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)} - \frac{1}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)} > \frac{1}{2}\,\frac{1}{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)} > 0; \quad x > x_0$$

и

$$\int_0^\infty K(t,\ x,\ h)\,n(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{\frac{\lambda(x)}{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)} - \frac{1}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}\right)\lambda(x)} \ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x) =$$

$$= 2e^{\frac{\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}} \ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x).$$

Неравенство (5.11) дает нам теперь с учетом того, что $\ln h < 0$,

$$L(x)\,d \leqslant \ln\mu(x+d) - \ln\mu(x) +$$

$$+ \frac{\lambda(x+d)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda(x+d)} + \frac{\lambda(x+d)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x+d)} + \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\ln\ln\lambda(x) + \ln 2,$$

а неравенство (6.11) –

$$L(x+d)\,d > \ln\mu(x+d) - \ln\mu(x) -$$

$$- \frac{\lambda(x)}{\ln^{1+\frac{3}{4}\alpha}\lambda(x)} - \frac{\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)} - \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\ln\ln\lambda(x) - \ln 2.$$

Воспользуемся, наконец, неравенствами (4.9), в согласии с которыми из последних неравенств следует:

$$L(x)\,d < \lambda(x+d)\,d + \frac{2\lambda(x+d)}{\ln^{1+\frac{3\alpha}{4}}\lambda(x+d)} + \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\ln\ln\lambda(x+d) + \ln 2 \qquad (7.11)$$

и

$$L(x+d)\,d > \lambda(x)\,d - \frac{2\lambda(x)}{\ln^{1+\frac{3\alpha}{4}}\lambda(x)} - \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\ln\ln\lambda(x) - \ln 2. \qquad (8.11)$$

Положим в (7.11) $d = \ln^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\lambda(x)$. Оценив $\lambda(x+d)$ с помощью (9.10), получаем:

$$L(x) < \left(1 + \frac{1}{\ln^{\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)}\right)\lambda(x) + \frac{2\left(1+\ln^{-\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)\right)\lambda(x)}{\ln^{\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)} + \ln 2\cdot\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x) +$$

$$+\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)\ln\ln\left(1+o(1)\right)\lambda(x) = \left(1+o(1)\right)\lambda(x);\quad x \notin E. \qquad (9.11)$$

Подставив, далее, в (8.11) $d = \ln^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}L(x)$, с учетом (9.10) аналогично предыдущему выводим:

$$L(x) \geqslant \left(1+o(1)\right)\lambda(x);\quad x \notin E.$$

Последнее неравенство вместе с (9.11) доказывает теорему.

Заметим в заключен ие, что в весьма частном случае $\lambda_n > cn$, $n=1, 2, \ldots$, $c=\text{const}$ из изложенного в этой статье следуют результаты работы [7], которые получены методом, совершенно отличающимся от нашего.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 23.XII.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Валирон, Аналитические функции, М., 1957.
2. G. Doetsch, Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Graden, Math. Z., 8, 1920, 237–240.
3. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.–Л., 1950.
4. R. Nevanlinna, Remarques sur les fonctions monotones, Bull. des Scien. Math., 55, 1931, 140–144.
5. Г. Полия, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, I, М., 1959.
6. Ш. И. Стрелиц. Поведение аналитической функции при больших значениях ее модуля, Лит. мат. сб., III, 2, 1963, 123–175.
7. F. Sunyer-Balaguer, Generalizacion del método de Wiman–Valiron a una clase de series de Dirichlet, Publs. semin. mat. Fac. cienc. Zaragoza, 3, 1962, 43–47.

ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ PUSPLOKŠTUMĖJE ASIMPTOTINĖS SAVYBĖS

Š. Strelicas

(Reziumė)

Analizinė funkcija $f(z)$ pusplokštumėje $x=\text{Reel}\, z>0$ priklauso klasei π tada ir tik tada, kai

$$S(x)=S(x, f) = \sup_{-\infty > y > \infty} |f(x \in iy)| < \infty.$$

Darbe nagrinėjamos π klasės funkcijų Vimano–Valisono tipo asimptotinės savybės. Žemiau formuluojame keletą iš išdėstytų straipsnyje charakteringų rezultatų.

4 teorema. *Sakysime, $f(z) \in \pi$ ir $\lim\limits_{x\to\infty} L(x, f)=\infty$, kur $L(x, f)=\dfrac{d \ln S(x, f)}{dx}$, o $\{w\}$ yra aibė taškų, kuriuose*

$$|f(w)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x, f)\; S(x, f);\ \text{Reel}\, w=x>0$$

su funkcija $\beta(x)$, patenkinančia nelygybę:

$$\beta(x) \leqslant q < \frac{1}{2}.$$

Šiomis sąlygomis

$$\lim_{\substack{x\to\infty;\\ x \notin E}} \frac{1}{L^j(x, f)} \frac{f^{(j)}(w)}{f(w)} = 1;\ j=1, 2, \ldots,$$

kur E yra tam tikra pusašies $x>0$ baigtinio mato intervalu seka.

6 teorema. *Sakysime, $f(z) \in \pi$ ir $\lim\limits_{x\to\infty} L(x, f)=\infty$. Galioja sekančios asimptotinės lygybės:*

$$S(x, f^{(j)}) = \big(1 + o(1)\big)\, L^j(x, f)\, S(x, f);\ x \notin E_j;\ \ j=1, 2, \ldots,$$

kur E_j yra tam tikra pusašies $x>0$ baigtinio mato intervalų seka.

Nesunku įsitikinti, kad absoliučiai konverguojanti baigtinėje plokštumoje $z \neq \infty$ Dirichle eilutė

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{\lambda_j z} \tag{1}$$

su $0<\lambda_j \uparrow \infty$ priklauso klasei π. (1) eilutės maksimaliniu nariu vadiname funkciją

$$\mu(x) = \max_j \{ |a_j| e^{\lambda_j z} \},$$

jos centriniu indeksu – funkciją $\nu(x)$, kuri definuojama lygybe

$$\mu(x)=|a_{\nu(x)}|e^{\lambda_{\nu(x)}x}>|a_{\nu(x)+p}|e^{\lambda_{\nu(x)+p}x};\quad p=1,\ 2,\ \ldots,$$

o centriniu rodikliu – funkciją $\lambda(x)=\lambda_{\nu(x)}$.

8 teorema. *Tarkime, kad egzistuoja toks pastovus skaičius $\alpha>0$, kuriam (1) eilutės rodikliai λ_n patenkina nelygybę*

$$\frac{\ln n}{\lambda_n}\ln^{1+\alpha}\lambda_n<C<\infty.$$

Šiomis sąlygomis

$$L(x,f)=\bigl(1+o(1)\bigr)\lambda(x);\quad x\notin E,$$

kur E yra tam tikra pusašies $x>0$ baigtinio mato intervalų seka.

Atskiru atveju, kai $\lambda_n>en$, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ c=\text{const}$, iš mūsų darbo seka [7] darbo rezultatai, kurie yra visiškai skirtingi nuo mūsų metodo.

Pabaigai pastebėsime, kad iš šio straipsnio rezultatų lengvai seka gerai žinomi Vimano—Valisono sąryšiai sveikos konscendentinės funkcijos $F(z)$ atveju, nes $F(e^z)\in\pi$.

ASYMPTOTISCHE EIGEHSCHAFTEN EINER ANALYTISCHEN IM HALBEBENE FUNKTION

Sch. Strelitz

(Zusammenfassung)

Eine analytische im Halbebene $x=\text{Reel}\,z>0$ Funktion $f(z)$ gehört zur Klasse π dann und nur dann, wenn

$$S(x)=S(x,f)=\sup_{-\infty<y<\infty}|f(x+iy)|<\infty;\quad x>0.$$

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir asymptotische Eigenschaften Wiman—Valironschen Gattung einer Funktion $f(z)\in\pi$. Wir formulieren nun einige ihrer Ergebnisse.

Satz 4. *Es sei $f(z)$ eine Funktion der Klasse π mit $\lim\limits_{x\to\infty}L(x,f)=\infty$, wo mit $L(x,f)$ wir die Ableitung $\dfrac{d\ln S(x,f)}{dx}$ bezeichnen, und $\{w\}$ – eine Menge von Punkten, in welchen*

$$|f(w)|\geqslant L^{-\beta(x)}(x,f)\,S(x,f),\ \text{Reel}\,w=x>0$$

mit $\beta(x)\leqslant q<\frac{1}{2}$. Bei diesen Bedingungen bestehen die Relationen:

$$\lim_{\substack{x\to\infty;\\ x\notin E}}\frac{1}{L^j(x,f)}\,\frac{f^{(j)}(w)}{f(w)}=1;\qquad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

wo E eine Intervalenfolge von endlichen Mass der Halbaxe $x>0$ ist.

Satz 6. *Es sei $f(z)$ eine Funktion der Klasse π mit $\lim\limits_{x\to\infty}L(x,f)=\infty$. Es bestehen die folgenden asymptotischen Beziehungen:*

$$S(x,f^{(j)})=\bigl(1+o(1)\bigr)L^j(x,f)\,S(x,f);\ x\notin E_j;\qquad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

wo E_j eine Intervalenfolge von endlichen Mass der Halbaxe $x>0$ ist.

Es ist evident, dass die in der endlichen Ebene $z\neq\infty$ absolut konvergierende Dirichlet'sche Reihe

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_je^{\lambda_jz}\tag{1}$$

mit $0<\lambda_j\uparrow\infty$ zur Klasse π gehört. Es sei nun

$$\mu(x)=\max_j\{|a_j|e^{\lambda_jx}\}$$

das Maximalglied, die Funktion $\nu(x)$, die man durch die Beziehung

$$\mu(x) = |a_{\nu(x)}| e^{\lambda_{\nu(x)} x} > |a_{\nu(x)+p}| e^{\lambda_{\nu(x)+p} x}; \qquad p = 1, 2, 3, \dots$$

feststellt, der Zentralindex und $\lambda(x) = \lambda_{\nu(x)}$ der Zentralexponent der Reihe (I). Es gilt der.

Satz 8. *Wenn die Exponentenfolge* $\{\lambda_j\}$ *der Reihe* (I) *für eine geeignete Zahl* $\alpha > 0$ *die Bedingung*

$$\frac{\ln n}{\lambda_n} \ln^{1+\alpha} \lambda_n < 1$$

befriedigt, besteht die Beziehung

$$L(x, f) = \big(1 + o(1)\big) \lambda(x); \quad x \notin E,$$

wo E *eine Intervalenfolge von endlichen Mass der Halbaxe* $x > 0$ *ist.*

Im Falle $\lambda_n > cn$; $n = 1, 2, \dots$, $c = \text{Const}$ folgen aus unserer Arbeit die Ergebnisse von [7], die durch ein Verfahren erhalten sind, das sich entschieden von unseren unterscheidet.

Bemerken wir noch, dass die gutbekannte Wiman—Valironschen Beziehungen für eine ganze transzendente Funktion $F(z)$ aus unseren leicht zu erhalten sind, denn $F(e^z) \in \pi$.