VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1966

ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. А. ПЕТРОВ

Пусть D – некоторая область плоскости комплексного переменного z. Функция $w=f(z)$ называется полианалитической порядка n (или n-аналитической) в области D, если она удовлетворяет в D обобщенному условию Коши—Римана:

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n}=0.$$

Классическая теорема единственности аналитических функций, как известно [1], не переносится на функции полианалитические буквально. Чтобы получить такого рода теоремы для полианалитических функций приходится налагать дополнительные условия либо на классическое множество единственности E [1], либо требовать, чтобы на E обращалась в нуль не только сама функция, а еще, например, и ее ареолярные производные [2]. В настоящей заметке в двух вышеуказанных направлениях на полианалитические функции для некоторых частных случаев границ обобщается граничная теорема единственности Лузина и Привалова.

Теорема 1. *Пусть D – жорданова область, граница которой содержит отрезок L прямой или окружности $\bar{z}=G(z)$. Если функция $f(z)$ n-аналитична в области D, а функция*

$$\frac{f(z)}{[\bar{z}-G(z)]^{n-1}} \tag{1}$$

имеет на L граничные значения, равные нулю, то $f(z)\equiv 0$ в D.

Доказательство. Предположим вначале, что L является отрезком мнимой оси $x=0$. Функция (1) в этом случае имеет вид

$$\frac{f(z)}{x^{n-1}}. \tag{1'}$$

Для $n=1$, то есть в случае аналитических функций, теорема верна. Допустим, что теорема верна для полианалитических функций порядка $n-1$. Хорошо известно, что $f(z)$ можно представить в области D в таком виде:

$$f(z)=u(z)+x^{n-1}\,h(z), \tag{2}$$

где $h(z)$ – аналитическая, а $u(z)$ – полианалитическая порядка $n-1$ в области D функции. Но $u(z)$ и $h(z)$ можно, в свою очередь, записать так:

$$\begin{aligned} u(z)&=u_0(z)+i\,u_1(z),\\ h(z)&=h_0(z)+i\,h_1(z), \end{aligned} \tag{3}$$

где $u_0(z)$, $u_1(z)$ – полигармонические порядка $n-1$ в D функции; $h_0(z)$, $h_1(z)$ – функции гармонические. Из (2) и (3) находим, что полигармонические порядка n в области D функции $\mathrm{Re}\, f(z)$ и $\mathrm{Im}\, f(z)$ имеют вид:

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u_0(z) + x^{n-1} h_0(z),$$
$$\mathrm{Im}\, f(z) = u_1(z) + x^{n-1} h_1(z).$$

Из условия теоремы следует, что как функция $\frac{\mathrm{Re}\, f(z)}{x^{n-1}}$, так и функция $\frac{\mathrm{Im}\, f(z)}{x^{n-1}}$ имеют на L нулевые граничные значения. Тогда, как показал А. Хубер [3], обе функции $\frac{u_0(z)}{x^{n-2}}$ и $\frac{u_1(z)}{x^{n-2}}$ также имеют на L нулевые граничные значения. Следовательно, таким же свойством обладает и полианалитическая порядка $n-1$ функция $u(z)$. Но тогда по индуктивному допущению $u(z) \equiv 0$ в D. Поэтому, как следует из (2), функция $f(z)$ на самом деле имеет вид:

$$f(z) = x^{n-1} h(z),$$

где $h(z)$ – аналитическая функция. Но из условия теоремы следует, что аналитическая функция $h(z)$ имеет на L нулевые граничные значения. Поэтому $h(z) \equiv 0$ в D, а следовательно, и $f(z) \equiv 0$ в D.

Пусть теперь L отрезок произвольной прямой $px+qy+l=0$. Функция (1) в этом случае суть:

$$\frac{f(z)}{(px+qy+l)^{n-1}} . \tag{1''}$$

Запишем уравнение прямой $px+qy+l=0$ в комплексной форме:

$$z = a + e^{i\alpha} \cdot t; \quad a = -\frac{l}{p}, \quad \alpha = \mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{p}{q}\right), \quad -\infty < t < \infty .$$

Предполагается, что прямая не параллельна действительной оси. В противном случае доказательство лишь упрощается.) С помощью преобразования плоскости

$$w = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \cdot (z-a)$$

отрезок прямой L преобразуется в отрезок прямой $w = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot t$ ($\mathrm{Re}\, w = 0$), область D – в равную себе область D', граница которой содержит отрезок L' мнимой оси. Рассмотрим в D' функцию $\varphi(w) = f(w^{-1})$. Она, очевидно, n-аналитична в D'. Так как далее

$$\mathrm{Re}\, w = \frac{px+qy+l}{-\sqrt{p^2+q^2}} ,$$

то функция $\frac{\varphi(w)}{[\mathrm{Re}\, w]^{n-1}}$ имеет на L' нулевые граничные значения. Поэтому $\varphi(w) \equiv 0$ в D', а это и означает, что $f(z) \equiv 0$ в D.

Пусть, наконец, граница области содержит дугу L некоторой окружности $|z-a| = R$ и функция (1), следовательно, имеет вид

$$\frac{f(z)}{(R-|z-a|)^{n-1}} . \tag{1'''}$$

Очевидно, не нарушая общности, можно считать, что L — дуга окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Рассмотрим инверсию $z' = \frac{1}{z}$ и введем обозначения:

$$|z-a| = \rho, \quad z' = r' e^{i\alpha'} = x' + iy', \quad z = re^{i\alpha}.$$

Это преобразование переводит дугу L в отрезок прямой $\operatorname{Re} z' = 1$, а область D — в симметричную относительно единичной окружности область D', граница которой содержит отрезок прямой $x' - 1 = 0$. Рассмотрим функцию

$$F(z') = (\bar{z}')^{n-1} \cdot f\left(\frac{1}{z'}\right). \tag{4}$$

Она, очевидно, n-аналитична в области D'. Если провести несложные вычисления, то получим

$$x' - 1 = r'^2 \left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)$$

и

$$\frac{F(z')}{(x'-1)^{n-1}} = \left(\frac{r^2}{z}\right)^{n-1} \cdot \overline{\left(\frac{f(z)}{\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)^{n-1}}\right)}.$$

Поэтому из ($1'''$), очевидно, следует, что функция $\frac{F(z')}{(x'-1)^{n-1}}$ имеет на L' нулевые граничные значения и, значит, по только что доказанному, $F(z') \equiv 0$ в D'. Из (4) ясно теперь, что $f(z) \equiv 0$ в D. Теорема доказана полностью.

Ниже будет идти речь об аналитических дугах. Под аналитической дугой мы понимаем здесь дугу, которая является гомеоморфом некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$, причем этот гомеоморфизм может быть задан с помощью аналитической функции $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\lambda'(t) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$. Для всякой такой дуги γ существует (см. [4]) функция $G(z)$, которая аналитична в некоторой области Δ, содержащей γ, и $\bar{z} = G(z)$ во всех точках дуги γ. Будем говорить, что эта *функция определяет дугу* γ.

Конечную совокупность аналитических дуг $\{\gamma_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ назовем *согласованной с областью* D, если

1) $\gamma_i \subset \bar{D}$ при любом i;

2) определяющие $\{\gamma_i\}$ функции можно подобрать так, чтобы для их областей аналитичности $\{\Delta_i\}$ выполнялось соотношение:

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \cap \ldots \cap \Delta_n \neq \varnothing. \tag{5}$$

Очевидно, любое число отрезков и окружностей, удовлетворяющих условию 1) будут согласованными с областью.

Множество E, лежащее на аналитической дуге γ, согласованной с областью D, будем называть *обыкновенным*, если $\operatorname{mes} E > 0$ в случае дуги $\gamma \subset \partial D$ или — в остальных случаях — множество E имеет хотя бы одну предельную точку $a \subset \gamma \subset D$.

Две дуги γ_1 и γ_2 будем называть *различными*, если различны определяющие их функции.

Всякую полианалитическую порядка n в некоторой области D функцию $w(z)$ можно, как хорошо известно, представить в виде:

$$w(z)=f_0(z)+\bar{z}f_1(z)+\cdots+\bar{z}^{n-1}f_{n-1}(z), \tag{6}$$

где $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_{n-1}(z)$ — функции, аналитические в D. Пусть $t\subset\partial D$. Условимся говорить, что n-аналитическая *функция* (6) *имеет в точке* t *сильное угловое граничное значение*, если в этой точке существуют угловые граничные значения у каждой из функций $f_i(z)$; $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Легко убедиться, что полианалитическая функция, имеющая в данной граничной точке угловое граничное значение, сильного углового граничного значения в этой точке может и не иметь! Действительно, Каратеодори, как известно [5], показал, что существуют функции, голоморфные внутри единичного круга и ограниченные, такие, что на окружности $|z|=1$ есть множество T (меры нуль), при приближении к точкам которого z функция $f(z)$ такого типа не стремится ни к какому пределу. Отсюда ясно, что бианалитическая функция $(r^2-1)\cdot f(re^{i\Theta})$, во всех точках единичной окружности имея граничное значение (оно равно нулю), в точках множества T не имеет сильного углового граничного значения. Можно построить также примеры бианалитических в $|z|<1$ функций, которые не имеют сильных угловых граничных значений почти всюду на единичной окружности.

Условимся, наконец, для общности формулировок говорить, что *функция* (6) *обращается в нуль в граничной точке* t, если в этой точке существуют угловые граничные значения $f_i(t)$ у каждой из функций $f_i(z)$ и

$$f_0(t)+\bar{t}f_1(t)+\cdots+\bar{t}^{n-1}f_{n-1}(t)=0.$$

Таким образом, мы предполагаем при этом существование у функции $w(z$ в точке t сильного углового граничного значения.

Теорема 2. *Пусть даны жорданова область D и n различных согласованных с ней аналитических дуг γ_i ($i=1, 2, \ldots, n$). Если функция $w(z)$, полианалитическая порядка n в области D, обращается в нуль на n обыкновенных множествах $E_i\subset\gamma_i$, то $w(z)\equiv 0$ в D.*

Доказательство. Пусть γ_i определяется аналитической в некоторой области Δ_i функцией $G_i(z)$. Представим функцию $w(z)$ в виде (6) и рассмотрим функцию

$$F_i(z)=f_0(z)+G_i(z)f_1(z)+\cdots+[G_i(z)]^{n-1}f_{n-1}(z). \tag{2}$$

Эта функция аналитична в области $\delta_i=\Delta_i\cap D$ и на дуге γ_i совпадает с функцией $w(z)$. Поэтому на обыкновенном множестве $F_i\subset\gamma_i$ $F_i(z)$ обращается в нуль. Если $\gamma_i\subset D$, а следовательно $\gamma_i\subset\delta_i$, то $F_i(z)\equiv 0$ в силу классической теоремы единственности аналитических функций. Если же $\gamma_i\subset\partial D$, то есть $\gamma_i\subset\partial\delta_i$, то функция $F_i(z)$ удовлетворяет, очевидно, условию теоремы Лузина и Привалова, а следовательно $F_i(z)\equiv 0$ в δ_i. В силу (5) существует область $\delta\subset\delta_1\cap\delta_2\cap\ldots\cap\delta_n$. По только что доказанному, в области δ мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &f_0+G_1f_1+G_1f_2+\cdots+G_1^{n-1}f_{n-1}=0,\\ &f_0+G_2f_1+G_2f_2+\cdots+G_2^{n-1}f_{n-1}=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &f_0+G_nf_1+G_n^2f_2+\cdots+G_n^{n-1}f_{n-1}=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В δ, очевидно, можно выбрать такую область d, что при любом z из d главный определитель системы уравнений (7) – определитель Вандермонда

$$\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (G_i - G_j)$$

отличен от нуля. Поэтому система (7) в области d имеет только нулевые решения:

$$f_0(z) \equiv f_1(z) \equiv \cdots \equiv f_{n-1}(z) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что все функции $f_i(z)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ тождественно равны нулю, а это в силу (6) и означает, что $w(z) \equiv 0$ в D.

Замечание 1. Если при любом i $(i=1, 2, \ldots n)$ $\gamma_i \subset D$, то теорема 2 является частным случаем одной теоремы единственности М. Б. Балка [6].

Замечание 2. В качестве следствия из теорем 1 и 2 и принципа компактности для полианалитических функций нетрудно получить для последних некоторые новые аналоги теоремы Витали.

Смоленский Педагогический институт
им. К. Маркса

Поступило в редакцию
15.IV.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Балк, Теоремы единственности для полианалитических функций, Известия Академии наук Армянской ССР, серия физико-математических наук, том 18, № 3, 1965.
2. В. А. Петров, К теоремам единственности для полианалитических функций, Сборник научных работ аспирантов Смоленского педагогического института, Смоленск, 1966.
3. A. Huber, On the Reflection Principle for Polyharmonic Functions, Communs Pure and Appl. Math., т. 9, № 3, 1965.
4. М. Балк, О бианалитических функциях с неизолированными a-точками, Известия Академии наук Армянской ССР, серия физико-математических наук, том 17, № 3, 1964.
5. C. Caratheodory, Über die Beziehung gegenseitige... Math. Ann., т. 73, 1912—1913, стр. 305—320.
6. М. Б. Балк, Об одной теореме типа Витали для полианалитических функций, Тезисы докладов научно-технической конференции Ивановского энергетического института, Иваново, 1966.

KRAŠTINĖS VIENATINUMO TEOREMOS POLIANALIZINIŲ FUNKCIJŲ ATVEJU

V. PETROVAS

(Reziumė)

Funkcija $w=f(z)$ yra vadinama n-eilės polianalizine funkcija srityje D, jei šioje srityje yra patenkinta tapatybė

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} \equiv 0.$$

$n-1$ atveju polianalizinė funkcija srityje D yra kartu ir analizinė šioje srityje. Šiuo atveju $(n=1)$ yra gerai žinoma Privalovo—Luzino kraštinė vienetinumo teorema.

Sakome, kad sritis D patenkina tam tikras sąlygas ir įrodome minėtos Privalovo—Luzino teoremos analogus, kai n yra bet koks natūrinis skaičius.

BOUNDARY UNIQUENESS THEOREMS FOR POLYANALYTIC FUNCTIONS

V. PETROV

(Summary)

A function $f(z)$ is called polyanalytic of order n in a domain D if it satisfies the following equality

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} \equiv 0$$

in D. This paper gives the generalization of the boundary uniqueness theorem of Lusin and Privalov for polyanalitic functions in certain special cases of boundaries.