V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

Как хорошо известно, любое решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x)=0, \qquad a(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{1}$$

однозначно определяется (если $a(x)\not\equiv 0$) заданием n начальных условий Коши, то-есть, условий

$$y^{(m)}(0)=c_m, \qquad m=0,\ 1,\ \ldots\ n-1; \tag{2}$$

при этом, если $a_n \neq 0$, то всегда существует единственное решение, удовлетворяющее условиям (2).

Нас будет интересовать задача Коши для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$Ly\equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(x)=0. \tag{3}$$

Если действовать по прямой аналогии с уравнением конечного порядка, то задача Коши для уравнения (3) состояла бы в определении решения, удовлетворяющего условиям

$$y^{(n)}(0)=c_n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4}$$

Ясно, что если $y(x)$ аналитична в начале координат, то она вполне определяется условиями (4), и, если числа c_n задавать совершенно произвольно $\left(\text{лишь бы } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!}}<\infty\right)$, то соответствующая функция $y(x)$ вовсе не обязана удовлетворять уравнению (3).

Поэтому естественно поставить задачу Коши для (3) следующим образом: искать аналитическое в точке $x=0$ решение уравнения (3) такое, что

$$y^{(l_s)}(0)=c_{l_s}, \quad l_{s+1}>l_s, \qquad s=1,\ 2,\ \ldots, \tag{5}$$

где числа c_{l_s} заданы. Такую задачу будем называть обобщенной задачей Коши (о.з.К.).

В первом параграфе настоящей работы исследуется обобщенная задача Коши для уравнения конечного порядка (1). Во втором параграфе о.з.К. решается для уравнения бесконечного порядка (3) в классе $\bar{A}_0$ всех аналитических в начале координат функций. При этом предполагается, что оператор Ly в левой части (3) применим к классу $\tilde{A}_0$, то-есть, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\,|a_n|}=0$, или, что то же самое, $a(x)\in[1, 0]$. Наконец, в третьем параграфе о.з.К. для (3) исследуется в предположении, что $a(x)\in[1, \infty)$ (то-есть, что оператор Ly применим ко всем классам A_R функций, аналитических в круге $|z|<R$, при достаточно большом R); решение ищется в классе функций, аналитических в круге достаточно большого радиуса.

Всюду во всех трех параграфах (кроме теоремы 9 из § 2) предполагается, для простоты рассуждений, что характеристическая функция $a(x)$ (в частности, характеристический многочлен) имеет только простые нули и что $a(0)\neq 0$ (для того, чтобы добиться выполнения последнего условия, достаточно сделать замену $y^{(l)}(x)=v(x)$, где $l=\min\{k: a_k\neq 0\}$).

§ 1. Обобщенная задача Коши для уравнения конечного порядка

п. 1. Исследуем такую задачу для уравнения (1): найти решение (1), удовлетворяющее условиям

$$y^{(l_s)}(0)=c_{l_s}, \qquad s=1, 2, \ldots, m, \qquad l_{s+1}>l_s. \tag{6}$$

Иначе говоря, мы займемся вначале частным случаем о.з.К., когда последовательность $\{l_s\}$ состоит из конечного числа натуральных чисел (конечна). (Эту задачу можно назвать конечной о.з.К.). Числа l_s, m могут быть как больше, так и меньше n.

1. Пусть сначала $m\leqslant n$. Так как любое решение (1) может быть представлено в виде $y(x)=\sum\limits_{m=1}^{n} d_m e^{\lambda_m x}$, λ_m – корни $a(x)$, то задача сводится к определению чисел $d_1, d_2, \ldots, d_m$ из соотношений

$$c_{l_s}=\sum_{k=1}^{n} d_k(\lambda_k)^{l_s}, \qquad s=1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Будем считать, что $|\lambda_{k+1}|\geqslant|\lambda_k|$, $k=1, 2, \ldots, n-1$ (очевидно, что корни можно всегда так перенумеровать). Матрица M системы (7) имеет n столбцов и m строчек: $(M)_{i,j}=(\lambda_j)^{l_i}$. Если $r(A)$ – ранг любой матрицы A, то $r(M)\leqslant m$.

1a. Предположим, что $r(M)=m$, и пусть Δ – какой-нибудь определитель m-го порядка, отличный от нуля и составленный из k_1-го, k_2-го, ..., k_m-го столбцов и первой, второй, ... m-ой строчек матрицы M, так что $(\Delta)_{i,j}=(\lambda_{k_j})^{l_i}$, $1\leqslant i$, $j\leqslant m$. Обозначим через $\tilde{M}$ присоединенную матрицу системы (7). Очевидно, что $r(\tilde{M})$ не превышает числа m строчек в $\tilde{M}$, то-есть, $m=r(M)\leqslant r(\tilde{M})\leqslant m=r(M)$ и по теореме Кронекера–Капелли система (7) разрешима, а общее решение зависит от $n-m$ произвольных постоянных d_{q_i}, $i=1, 2, \ldots, n-m$, где q_i – числа, остающиеся после удаления из n чисел $1, 2, \ldots, n$ m чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Общее решение конечной о.з.К. имеет вид

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n-m} d_{q_i}e^{\lambda_{q_i}x}+\sum_{j=1}^{m}\tilde{d}_{k_j}e^{\lambda_{k_j}x}, \tag{8}$$

где d_{q_i}, $i=1, 2, \ldots, n-m$ — произвольные постоянные, а $\tilde{d}_{k_j}$ — числа, определяемые набором $(d_{q_1}, d_{q_2}, \ldots, d_{q_{n-m}})$.

Классом единственности решения о.з.К. будет любой класс решений вида (8) с фиксированными d_{q_i}, $1 \leqslant i \leqslant n-m$. В частности, классом единственности будет класс функций вида

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{d}_{k_j} e^{\lambda_{k_j} x}. \tag{9}$$

Если искать класс единственности в шкале пространств типа $[\rho, \sigma)^{(1)}$, то таким классом будет, как легко заметить, $[1, \sigma_\Delta)$, где $\sigma_\Delta = |\lambda_{q_1}|$. Так как, вообще говоря, может быть несколько определителей Δ m-го порядка (у матрицы M), отличных от нуля, то классом единственности будет $[1, \sigma^*)$, где σ^* — максимум σ_Δ по всем таким Δ. Очевидно, что число σ^* уже, вообще говоря, нельзя заменить большим.

1б. Пусть теперь $r(M) < m$. Это возможно тогда и только тогда, когда между m строчками существует линейная зависимость, то-есть, справедливы соотношения

$$\sum_{s=1}^{m} A_s (\lambda_k)^{l_s} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Иначе говоря, $r(M) < m$ в том и только том случае, если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются корнями одного и того же многочлена вида $\sum_{s=1}^{m} A_s x^{l_s}$ степени не выше l_m (в частности, если все $l_s < n$, то обязательно $r(\tilde{M}) = r(M)$).

Если $r(M) < m$, то для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы $r(\tilde{M}) = r(M)$. Это соотношение дает нам условия разрешимости — линейные связи на свободные члены c_{l_s} системы (7), выполнение которых необходимо и достаточно для разрешимости (эти условия получим, приравнивая нулю определители $\tilde{M}$, имеющие порядок $> r(M)$).

Если свободные члены удовлетворяют этим условиям, то решение задачи Коши существует и зависит от $n - r(M)$ произвольных постоянных. Класс единственности определяется точно так же, как в случае 1а.

2. Предположим, далее, что $m > n$. В этом случае $r(M) \leqslant n$, а матрица $\tilde{M}$ имеет $n+1$ столбец. Необходимое и достаточное условие разрешимости $r(M) = r(\tilde{M})$ в данном случае никогда не выполняется автоматически (как в случае $m \leqslant n$ и $r(M) = m$). В том (и только том) случае, если свободные члены — заданные числа c_{l_s} удовлетворяют линейным связям, выражающим тот факт, что $r(M) = r(\tilde{M})$, существует решение конечной о.з.К.; оно имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{r(M)} h_k e^{\lambda_{p_k} x} + \sum_{l=1}^{n-r(M)} d_l e^{\lambda_{q_l} x},$$

где d_l — произвольные постоянные, а h_k — числа, однозначно определяемые набором $\{d_s\}$; p_k — номера столбцов не равного нулю определителя $\tilde{\Delta}$ порядка $r(M)$ матрицы M; $\{q_l\}$ — дополнение $\{p_k\}$ до $(1, 2, \ldots, n)$.

В частности, если $r(M)=n$, то решение, в случае его существования, единственно в классе всех решений. В случае $r(M)<n$ можно указать класс единственности вида $[1, \sigma)$, как в случае 1a.

Подведем итог в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы конечная обобщенная задача Коши (6) для уравнения (1) порядка n $(a_n \neq 0)$ имела решение для любой заданной системы чисел $c_{l_1}, \ldots, c_{l_m}$, необходимо и достаточно, чтобы $m \leqslant n$ и чтобы числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (корни характеристического многочлена $a(x)$) не являлись бы одновременно нулями одного и того же многочлена вида $\sum_{k=1}^{m} A_k x^{l_k}$; иначе говоря, для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы $m \leqslant n$ и чтобы хотя бы один определитель порядка m матрицы M системы (7) был отличен от нуля.*

Для однозначной разрешимости конечной обобщенной задачи Коши по любым $\{c_{l_s}\}$ необходимо и достаточно, чтобы $n=m=r(M)$, то-есть, чтобы $n=m$ и $|M| \neq 0$.

Если не выполняется хотя бы одно из условий $m \leqslant n$, $r(M)=m$, обеспечивающих разрешимость задачи Коши при любых заданных $\{c_{l_s}\}$, то задача Коши разрешима тогда и только тогда, когда числа c_{l_s} удовлетворяют определенным линейным связям.

Для единственности решения задачи Коши в классе всех решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы $n=r(M)$.

п. 2. Как мы убедились, конечная о.з.К. для уравнения (1) легко исследуется методами линейной алгебры. Менее тривиальной является бесконечная о.з.К. (5) для уравнения (1). Для исследования этой задачи мы применим прием, который будет полезен и в дальнейшем, когда мы перейдем к задаче Коши для уравнения бесконечного порядка (3). Всякое решение (1) имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} d_k e^{\lambda_k x},$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k (\lambda_k)^m}{m!}. \tag{11}$$

Если $y(x)$ удовлетворяет условиям (5), то из (11) получаем

$$\tilde{C}(x)=\sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_{l_s} x^{l_s}}{(l_s)!} = \sum_{k=1}^{n} d_k g(\lambda_k x),$$

где $\tilde{C}(x)$ — заданная функция (заданная „часть" решения), а $g(x)=\sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^{l_s}}{(l_s)!}$ — функция из $[1, 1]$. Обозначим через F_n линейную оболочку n функций $g_k(x)=g(\lambda_k x)$. Очевидно, $F_n \subset [1, \infty)$.

Мы убедились, что если задача (5) для (1) разрешима, то $\tilde{C}(x) \in F_n$. Обратно, если $\tilde{C}(x) \in F_n$, то-есть, если $\tilde{C}(x)=\sum_{k=1}^{n} B_k g_k(x)$, то функция

$y(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} B_k e^{\lambda_k x}$ удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (5). Мы приходим к такому результату.

Теорема 2. *Для разрешимости обобщенной задачи Коши* (5) *для уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\tilde{C}(x)\in F_n$.

Для единственности решения задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы функции $g(\lambda_k x)$, $1\leqslant k\leqslant n$, *составляли базис в* F_n (то-есть, чтобы функции $g(\lambda_k x)$ были линейно-независимыми).

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть $l_s=2s$, $s=0, 1, \ldots$ Тогда $g(x)=\operatorname{ch} x$. По теореме 2 для разрешимости обобщенной задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы заданная часть решения $\tilde{C}(x)$ [имела вид $\tilde{C}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \operatorname{ch}\lambda_k x$. Критерий разрешимости можно в данном случае выразить в другой форме. Уравнение $\sum\limits_{k=0}^{2n} b_k y^{(k)}(x)=0$ с характеристической функцией $b(x)=a(x)\,a(-x)$ назовем „расширенным" уравнением. Множество E всех решений расширенного уравнения можно представить в виде прямой суммы двух подпространств $E=E_1\dot{+}E_2$, где E_1 — линейная оболочка функций $\{\operatorname{ch}\lambda_k x\}$, $1\leqslant k\leqslant n$, а E_2 — функций $\{\operatorname{sh}\lambda_k x\}$. Тогда для разрешимости о.з.К.: $y^{(2s)}(0)=c_{2s}$, $s=0, 1, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{C}(x)$ было решением расширенного уравнения из подпространства E_1.

Выясним вопрос о единственности о.з.К. Пусть сначала все числа λ_k^2 различны (то-есть, ни одно из чисел $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$ не является корнем $a(x)$). Тогда из равенств $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k (e^{\lambda_k x}+e^{-\lambda_k x})=0$, учитывая линейную независимость функций $\{e^{\lambda_k x}, e^{-\lambda_k x}\}$, $1\leqslant k\leqslant n$, получаем, что $\beta_k=0$, $k=1, 2, \ldots, n$, и решение о.з.К. (существующее, если $\tilde{C}\in F_n$) единственно. Пусть теперь по крайней мере два из квадратов $\{\lambda_k^2\}$ совпадают (скажем, $\lambda_2=-\lambda_1$). В этом случае функция $y(x)=\operatorname{sh}\lambda_1 x$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям $y^{(2n)}(0)=0$, $n=0, 1, \ldots$

Таким образом, для единственности решения о.з.К. необходимо и достаточно, чтобы все числа $\{\lambda_k^2\}$, $1\leqslant k\leqslant n$, были различны.

2. Аналогичными рассуждениями показываем, что для разрешимости о.з.К.: $y^{(ps)}(0)=c_{ps}$, $s=0, 1, 2, \ldots$, для уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{C}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_{sp}x^{sp}}{(sp)!}=\sum_{k=1}^{n}A_k g_p(\lambda_k x),$$

где

$$g_p(x)=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}e^{\varepsilon^j x},\qquad \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Для единственности решения о.з.К. необходимо и достаточно, чтобы все числа $(\lambda_k)^p$, $k=1, 2, \ldots, n$ были различны.

3. Пусть, наконец, $l_0=0$, $l_1=1$, $l_s=2(s-1)$, $s=2, 3, \ldots$; в данном случае $g(x)=x+\operatorname{ch} x$. Для разрешимости задачи Коши: $y^{(l_s)}(0)=c_{l_s}$, $s=0, 1, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{l_s}}{(l_s)!} x^{l_s} = \sum_{k=1}^{n} B_k [\lambda_k x + \operatorname{ch} \lambda_k x].$$

Для единственности решения задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы среди чисел $\{\lambda_k^2\}$ было не более двух равных друг другу.

Замечание. До сих пор мы рассматривали задачу Коши (5) и (6) для однородного уравнения (1). Не представляет никакого труда перейти от обобщенной задачи Коши для неоднородного уравнения с правой частью $f(x) \in \bar{A}_0$ к задаче Коши для однородного уравнения. Для этого достаточно сделать замену $y(z)-y_0(z)=v(z)$, где $v(z)$ — новая неизвестная функция, а $y_0(z)$ — любое частное решение неоднородного уравнения, которое, как известно, аналитично в той же области, что и $f(z)$.

§ 2. Задача Коши для уравнения бесконечного порядка, характеристическая функция которого принадлежит классу [1, 0]

п. 1. Пусть характеристическая функция $a(x)$ уравнения (3) является трансцендентной целой функцией из класса [1, 0]. Из результатов Ритта, Полиа и Валирона[2]–[4] следует, что если $y(x)$ принадлежит A_R и удовлетворяет уравнению (3) в окрестности начала координат, то равномерно внутри круга $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_n} a_{s,k} e^{\lambda_k x}$. Заметим, что если $a(x) \in [1, 0]$ и λ_k — нули $a(x)$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k}=0$[1]. Предположим, что функция

$$F(x)=\prod{}' \left(1-\frac{x^p}{\lambda_k^p}\right),$$

где суммирование ведется по всем тем (и только тем) k, для которых $\lambda_k^p \neq \lambda_m^p$, если $k \neq m$, удовлетворяет при некотором целом $p \geqslant 2$ условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|F'(\lambda_n)|} \leqslant 0. \tag{12}$$

Условие (12) обязательно выполнено, если $\varliminf\limits_{n\to\infty} [|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|] \geqslant h > 0$. Из результатов монографии А. Ф. Леонтьева[1] следует, что

$$y(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{\lambda_k x},$$

где $\alpha_k=\lim\limits_{n\to\infty} a_{k,n}$, $k=1, 2, \ldots$, причем для любого $r<R$,

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \, |e^{\lambda_k x}| \leqslant B(r)$$

для всех $n \geqslant 0$ и $|x| \leqslant r$.

Отсюда при $x=re^{-i \arg \lambda_k}$ $|\alpha_k| \leqslant B(r) e^{-|\lambda_k| r}$, и при $|x| \leqslant r_1 < r$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \, |e^{\lambda_k x}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| e^{|\lambda_k| r_1} \leqslant B(r) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-|\lambda_k|(r-r_1)} < \infty.$$

Итак, при сделанных предположениях любое решение (3) из A_R представляется в виде равномерно сходящегося внутри круга $|x|<R$ ряда

$$y(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{\lambda_k x}, \tag{13}$$

причем $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|e^{|\lambda_k|r}<\infty$ для всех $r<R$. Отсюда, если $|x|<R$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty}y_k x^k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda_k)^m\frac{x^m}{m!}. \tag{14}$$

п. 2. Рассмотрим сначала конечную обобщенную задачу Коши. Если $y(x)$ — решение уравнения (3) при условиях (6), то из (14) следует

$$\tilde{C}(x)=\sum_{s=1}^{m}\frac{c_{l_s}x^{l_s}}{(l_s)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k g(\lambda_k x),$$

где

$$g(x)=\sum_{s=1}^{m}\frac{x^{l_s}}{(l_s)!}.$$

Покажем, что конечная о.з.К. всегда разрешима. Возьмем $n>l_m$ и обозначим через M матрицу с n столбцами и m строчками:

$$(M)_{i,j}=(\lambda_j)^{l_i}, \qquad 1\leqslant j\leqslant n, \quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

Тогда $r(M)=m$, так как хотя бы один из определителей M порядка m отличен от нуля. Значит, система уравнений

$$c_{l_s}=\sum_{k=1}^{n}d_k(\lambda_k)^{l_s}, \qquad s=1,\ 2,\ \ldots m$$

разрешима, и решение зависит от $n-m$ произвольных постоянных. Функция $y(x)=\sum_{k=1}^{n}d_k e^{\lambda_k x}$ удовлетворяет уравнению (3) и начальным условиям (6), причем из n чисел $d_1,\ \ldots, d_n$ $n-m$ остаются произвольными постоянными.

п. 3. Пусть теперь задано бесконечное число условий (5). Из представления (14), учитывая равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|e^{|\lambda_k x|},$$

получаем

$$\tilde{C}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_{l_j}x^{l_j}}{(l_j)!}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{(\lambda_k)^{l_j}}{(l_j)!}x^{l_j}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\lambda_k)^{l_j}x^{l_j}}{(l_j)!}.$$

Итак, если решение о.з.К. из A_R существует, то

$$\tilde{C}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_{l_j}x^{l_j}}{(l_j)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k g(\lambda_k x), \qquad g(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{x^{l_s}}{(l_s)!}\in[1,\ 1].$$

При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| M(r, g_k) < \infty$$

для всех $r < R$, где $g_k(x) = g(\lambda_k x)$. Обозначим через $N(g_k, R)$ регулярную оболочку функций g_k, то-есть, множество функций $v(x) \in A_R$, представимых в виде ряда

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g_k(x)$$

такого, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| M(r, g_k) < \infty$$

для всех $r < R$ Будем говорить, что функции $\{g_k(x)\}$ не допускают нетривиального разложения нуля в $N(g_k, R)$, если из соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g_k(x) \equiv 0, \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| M(r, g_k) < \infty$$

для всех $r < R$ следует, что $\gamma_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Наконец, целые функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ назовем эквивалентными по своему росту ($v_1 \sim v_2$), если

$$0 < \varliminf_{r\to\infty} \frac{M(r, v_1)}{M(r, v_2)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{M(r, v_1)}{M(r, v_2)} < \infty .$$

В частности, $g(x) \sim e^x$, если $\varliminf_{r\to\infty} e^{-r} M(r, g) > 0$.

Теорема 3. *Если* $g(x) \sim e^x$, $a(x) \in [1, 0]$, $\tilde{C}(x) \in N(g_k, R)$, *то в* A_R *существует решение задачи Коши с условиями* (5). *Обратно, если характеристическая функция* $a(x) \in [1, 0]$ *и имеет простые корни, удовлетворяющие условию* (12) *при некотором* $p \geqslant 2$, *то для разрешимости* о.з.К. *с условиями* (5) *в* A_R *необходимо, чтобы* $\tilde{C}(x) \in N(g_k, R)$.

Вторая часть теоремы очевидным образом вытекает из предыдущих рассуждений. Пусть теперь $\tilde{C} \in N(g_k, R)$, то-есть, $\tilde{C}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k g(\lambda_k x)$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} |\delta_k| M(r, g_k) < \infty$ для всех $r < R$. Если $g(x) \sim e^x$, то функция $v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k e^{\lambda_k x}$ принадлежит A_R и удовлетворяет уравнению (3) и начальным условиям (5).

Теорема 4. *Пусть* $a(x) \in [1, 0]$, *имеет простые корни и* $g(x) \sim e^x$. *Тогда для единственности решения задачи Коши в* A_R *необходимо, чтобы функции* $\{g_k(x)\}$ *не допускали нетривиального разложения нуля в* $N(g_k, R)$. *Обратно, если* $a(x) \in [1, 0]$, *имеет простые корни, удовлетворяющие условию* (12), *а функции* $\{g_k(x)\}$ *не допускают нетривиального разложения нуля в* $N(g_k, R)$, *то решение о.з.К.* (5) *из* A_R (если оно существует) *единственно.*

Действительно, если $0 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g_k(x)$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| M(r, g_k) < \infty$ для всех $r < R$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| > 0$, то функция $v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{\lambda_k x} \in A_R$ удовлетворяет уравнению и нулевым начальным условиям: $v^{(l_s)}(0) = 0$, $s = 1, 2, \ldots$ причем $v(x) \not\equiv 0$.

Обратно, если $\{g_k\}$ не допускают нетривиального разложения нуля в $N(g_k, R)$, а $y(x) \in A_R$ и удовлетворяет уравнению и начальным условиям $y^{(l_s)}(0) = 0$, $s = 1, 2, \ldots$, то $y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{\lambda_k x}$, откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g(\lambda_k x) \equiv 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| M(r, g_k) < \infty \quad \text{при} \quad r < R;$$

но тогда $\gamma_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и $y(x) \equiv 0$.

Следствие. Если $a(x) \in [1, 0]$ имеет простые корни, удовлетворяющие условию (12), а $\{g_k(x)\}$ составляют базис в замыкании своей линейной оболочки по топологии равномерной сходимости внутри круга $|z| < R$, то решения о.з.К. (5) в A_R (если оно существует!) единственно.

Теоремы 3—4 показывают, что вопрос о разрешимости задачи Коши связан с некоторыми проблемами теории базисов в аналитических пространствах. В частности, возникает такая задача (нам кажется, что она является новой в теории базисов аналитических функций): пусть $\Lambda = \{n_k\}$ — некоторая подпоследовательность натуральных чисел и $A_{R, \Lambda}$ — подпространство A_R (по естественной топологии A_R), состоящее из функций вида $v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{n_k}$, $\overline{\lim_{k\to\infty}} |b_k|^{\frac{1}{n_k}} \leqslant \frac{1}{R}$. Пусть, далее, $g_k(x)$ — система функций из $A_{R, \Lambda}$. Спрашивается, когда эта система составляет базис в $A_{R, \Lambda}$; в частности, когда g_k составляет базис регулярной сходимости в $A_{R, \Lambda}$[5]. Для решения задачи Коши важно исследовать случай, когда

$$g_k(x) = g(\lambda_k x), \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{n_k}}{(n_k)!} \in A_{\infty, \Lambda}.$$

Интересно также выяснить, возможны ли случаи, когда $A_{R, \Lambda} = N\big(g(\lambda_k x), R\big)$ (во всех известных нам случаях $N(g_k, R)$ является собственным подмножеством $A_{R, \Lambda}$). Легко видеть, что пространства $A_{R, \Lambda}$ нормальны, но отличаются от обычно изучаемых аналитических пространств типа A_R, E_σ и т. д.[9] тем, что содержат не все орты $\{z^m\}$. Можно поставить еше следующий вопрос: пусть

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k, n} z^k, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

составляют базис или полную систему в A_R и

$$\hat{f}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' a_{k, n} z^k, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$
$$k \in \Lambda$$

при каких условиях система $\hat{f}_n(z)$ также составляет базис (соответственно полную систему) в $A_{R,\Lambda}$?

Для полных систем вопрос решается просто. Именно, пусть I подпространство A_R, состоящее из функций $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$; $\hat{I}$ — подмножество A_R функций вида $\hat{f}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}{}' c_k z^k$ $k\in\Lambda$ (т. е. множество функций, которые получатся, если в тейлоровских разложениях функций $f\in I$ положить равными нулю все c_k, для которых $k\,\bar{\in}\, I$).

Тогда, если система $\{f_n(z)\}$ полна в I (по естественной топологии A_R), то, как легко показать, система $\hat{f}_n(z)$ полна в $\hat{I}$ (по той же топологии). Соответствующий вопрос для базисов, по-видимому, не так прост.

п. 4. Применим теперь теоремы 3—4 к исследованию некоторых конкретных случаев о.з.К., когда по-следовательность $\{l_s\}$ выбирается специальным образом.

1. Пусть $l_s=sp$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ p\geqslant 2$. В этом случае

$$g(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{sp}}{(sp)!}=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}e^{\varepsilon^j x},\qquad \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Очевидно, что $M(r,\ g)\leqslant e^r$. С другой стороны,

$$M(r,\ g)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{r^{sp}}{(sp)!}=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}e^{\varepsilon^j r}\geqslant\frac{1}{p}\left[e^r-\sum_{j=1}^{p-1}e^{|\varepsilon^j|r}\right]\geqslant\frac{e^r}{p}-\frac{(p-1)}{p}e^{\alpha r},$$

где

$$\alpha=\max_{1\leqslant s\leqslant p-1}\cos\frac{2\pi s}{p},\qquad \alpha<1.$$

Таким образом,

$$\varliminf_{r\to\infty} e^{-r}M(r,\ g)\geqslant\frac{1}{p}>0.$$

Применяя теорему 3, получаем, что при выполнении условия (12) для разрешимости задачи Коши с данными

$$y^{(sp)}(0)=c_{sp},\qquad s=0,\ 1,\ \ldots \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{C}(x)\equiv\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_{sp}}{(sp)!}x^{sp}\in N(g_k,\ R),$$

то-есть, чтобы

$$\tilde{C}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sum_{j=0}^{p-1}e^{\varepsilon^j\lambda_k x},\quad\text{где}\quad\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|e^{|\lambda_k|r}\quad\text{для}\quad r<R. \tag{16}$$

Иначе говоря,

$$\tilde{C}(x)\in N(e^{\mu_s x},\ R),\quad \mu_s=\varepsilon^j\lambda_k,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,p-1,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$k=\left[\frac{s}{p}\right]+1,\quad j=s-p\left[\frac{s}{p}\right],\quad s\geqslant 0:\tilde{C}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s e^{\mu_s x},$$

причем между коэффициентами γ_s должна быть определенная связь. Именно, если $s=qp+j_0$, $0\leqslant j_0\leqslant p-1$, то введем функцию

$$L_s(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq q}}^{\infty}{}'\left(1-\frac{x^p}{\lambda_k^p}\right)\prod_{\substack{j=1\\j\neq j_0}}^{p}{}'\left(1-\frac{x}{\lambda_q\varepsilon^j}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{s,k}x^k$$

и соответствующий оператор

$$M_s(D)\,y=\sum_{k=0}^{\infty}a_{s,k}\,y^{(k)}(x).$$

Предположим, что все числа λ_k^p различны. Тогда

$$M_s(D)\,\tilde{C}(x)=L_s(\varepsilon^{j_0}\lambda_q)\,\gamma_{qp+j_0}e^{\lambda_{qp+j_0}\varepsilon^{j_0}x},$$

откуда

$$\gamma_{qp+j_0}=\frac{M_s(D)\,\tilde{C}(x)\,|_{x=0}}{L_s(\varepsilon^{j_0}\lambda_q)}.$$

Из (16) получаем

$$\gamma_{pq}=\gamma_{pq+j_1}=\ldots=\gamma_{pq+p-1},\qquad q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

то-есть

$$\frac{M_{pq}(D)\,\tilde{C}(x)\,|_{x=0}}{L_{pq}(\lambda_q)}=\frac{M_{pq+1}(D)\,\tilde{C}(x)\,|_{x=0}}{L_{pq+1}(\varepsilon\lambda_q)}=\ldots=$$

$$=\frac{M_{pq+p-1}(D)\,\tilde{C}(x)\,|_{x=0}}{L_{pq+p-1}(\varepsilon^{p-1}\lambda_q)},\qquad q=0,\ 1,\ \ldots \tag{17}$$

Итак, для разрешимости задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{C}(x)\in N(e^{\mu_s x},\ R)$ и чтобы выполнялись условия (17). Эти же условия можно выразить в другой, более наглядной форме. Введем систему функций

$$v_l(x)=\sum_{j=0}^{p-1}\varepsilon^{jl}e^{\varepsilon^j x},\quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1,\quad \Big(v_0(x)=pg(x)\Big).$$

Нетрудно проверить, что при любом $r>0$

$$D_2\max_{0\leqslant j\leqslant p-1}M(r,\ e^{\varepsilon^j x})\leqslant\max_{0\leqslant l\leqslant p-1}M(r,\ v_l)\leqslant D_1\max_{0\leqslant j\leqslant p-1}M(r,\ e^{\varepsilon^j x}), \tag{18}$$

где $D_2>0$, $D_1<\infty$, D_i не зависят от r. Кроме того,

$$e^{\varepsilon^j x}=\sum_{l=0}^{p-1}\delta_{j,l}\,v_l(x),\qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1.$$

Если все числа λ_k^p различны, то на основании оценок (18) и результатов монографии[1] получаем, что система функций $\{v_l(\lambda_k x)\}$, $l=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ составляет регулярный базис в $N(e^{\mu_s x},\ R)$, причем замыкания линейных оболочек $E\Big(v_l(\lambda_k x),\ R\Big)$ и $E\Big(v_{l_1}(\lambda_k x),\ R\Big)$ при $l\neq l_1$, имеют только один общий элемент, а именно нулевой. Каждая функция $v_l(\lambda_k x)$ является решением уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k y^{(kp)}(x)=0,\qquad b(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^{kp}=\prod_{j=0}^{p-1}a(\varepsilon^j x)=\prod_{q=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^p}{(\lambda_q)^p}\right). \tag{19}$$

Пусть функция $b(x)$ такова, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|b'(\lambda_n)|} \leqslant 0$$

$\left(\text{это, в частности, будет, если } \underline{\lim}_{n\to\infty} (|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|)>0\right)$. Тогда любое решение $w(x)$ уравнения (18) принадлежит $N(e^{\mu_s x}, R)$ и представляется единственным образом в виде регулярно сходящегося ряда

$$w(x)=\sum_{s=0}^{\infty} \Lambda_s e^{\mu_s x}=\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_{l,k} v_l(\lambda_k x)=\sum_{l=0}^{p-1} w(x),$$

где $w_l(x)$ — решение (18) из подпространства T_l^R решений — замыкания (по топологии A_R) линейной оболочки системы $\{v_l(\lambda_k x)\}$, $k=1, 2, \ldots$ $\left(\text{в данном случае } T_l^R=N\left(v_l(\lambda_k x), R\right)\right)$.

Все пространство T^R решений уравнения (19) из A_R представляется в виде прямой суммы p подпространств $T^R=T_0^R \dotplus T_1^R \dotplus \ldots \dotplus T_{p-1}^R$. Мы можем сформулировать окончательный вывод следующим образом.

Теорема 5. *Пусть характеристическая функция $a(x)$ уравнения* (3) *является целой трансцендентной функцией из класса* $[1, 0]$, *а ее нули λ_k удовлетворяют условию Q: все числа λ_k^p, $k=1, 2, \ldots$ различны и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|b'(\lambda_n)|} \leqslant 0,$$

где

$$b(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^p}{\lambda_k^p}\right).$$

Тогда для разрешимости в A_R о.з.К. с условиями (15) *необходимо и достаточно, чтоды „начальная функция“*

$$\bar{C}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{pn}}{(pn)!} x^{pn}$$

являлась бы решением „расширенного“ уравнения (19) *из подпространства T_0^R.*

Условия Q можно заменить более грубым, но зато и более простым условием Q_1: $\underline{\lim}_{n\to\infty} (|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|)>0$.

Выясним вопрос о единственности решения задачи Коши с условиями (15) в классе A_R. Пусть $y(x)\in \bar{A}_0$, удовлетворяет в окрестности $x=0$ уравнению (3) и начальным условиям

$$y^{(sp)}(0)=0, \qquad s=0, 1, \ldots \tag{20}$$

Предположим, что $a(x)\in[1, 0]$ и что все числа λ_k^p различны. Равномерно внутри некоторого круга $|x|<r^{(1)}$

$$y(x)=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} e^{\lambda_k x},$$

причем при любом $s \geqslant 1$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_{s,n} = \alpha_s$. Введем оператор $M_s(D)y$, порожденный функцией

$$L_s(x) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x^p}{\lambda_k^p}\right),$$

тогда равномерно внутри круга $|x| < r$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{k,s} y^{(kp)}(x) \equiv M_s(D) y(x) = \lim_{n\to\infty} a_{s,n} e^{\lambda_s x} L_s(\lambda_s) = L_s(\lambda_s) e^{\lambda_s x} \alpha_s.$$

Положив $x = 0$ и учитывая начальные условия, найдем

$$0 = M_s(D) y(x)|_{x=0} = L_s(\lambda_s) e^{\lambda_s x} \alpha_s, \quad \text{и} \quad \alpha_s = 0, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Но тогда, в силу известной теоремы А. Ф. Леонтьева[1], $y(x) \equiv 0$. Пусть теперь хотя бы для одной пары $\lambda_{k_1}^p = \lambda_{k_2}^p$, $k_1 \neq k_2$. Тогда целая функция $y(x) = e^{\lambda_{k_1} x} - e^{\lambda_{k_1} \varepsilon_p x}$, где $\lambda_{k_2} = \varepsilon_p \lambda_{k_1}$, удовлетворяет уравнению (3) и нулевым условиям (20). Мы пришли к такому результату.

Теорема 6. *Если* $a(x) \in [1, 0]$ *и все числа* $(\lambda_k)^p$, $k = 1, 2, \ldots$ *различны, то решение задачи Коши* (15) (если оно существует) *единственно в* $\bar{A}_0$.

Если $a(x) \in [1, 0]$ *и в последовательности* $(\lambda_k)^p$ *есть хотя бы 2 равных числа, то решение задачи Коши* (15) *не единственно в* $\bar{A}_0$, A_R $(0 < R < \infty)$, A_∞ *и* $[1, \infty)$.

Можно рассмотреть более общий способ задания, когда множество $\{l_s\}$ отличается от множества $\{sp\}$ на конечное число членов. В этом случае

$$g(x) = Q(x) + \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{\varepsilon^j x}, \qquad Q(x) = \sum_{m=0}^{N} h_m x^m,$$

и по-прежнему $g(x) \sim e^x$.

Докажем сначала довольно общую теорему единственности.

Теорема 7. *Пусть функция* $a(x)$ *из* $[1, 0]$ *имеет простые корни* λ_k, *причем все числа* λ_k^p *различны. Тогда; если* $y(x)$ — *решение уравнения* (3) *из* $\bar{A}_0$ *такое, что* $y^{(sp)}(0) = 0$ *для* $s \geqslant s_0$, *то* $y(x) \equiv 0$.

Доказательство. Продифференцировав $s_0 p$ раз соотношение (3), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k + s_0 p)}(x) = 0, \qquad |x| \leqslant r.$$

Положим $y^{(s_0 p)}(x) = v(x)$, $v \in A_r \subset \bar{A}_0$ и v удовлетворяет (3), причем $v^{(sp)}(0) = 0$, $s = 0, 1, \ldots$ На основании теоремы 6 $v(x) \equiv 0$ и $y(x) = R(x)$, где $R(x)$ — многочлен степени $\leqslant s_0 p - 1$. Равномерно внутри круга $|x| \leqslant r$

$$y(x) = R(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} e^{\lambda_k x}, \quad \lim_{n\to\infty} a_{k,n} = \alpha_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Но тогда также равномерно внутри этого круга

$$y^{(s_0 p)}(x) = R^{(s_0 p)}(x) = 0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} (\lambda_k)^{s_0 p} e^{\lambda_k x},$$

откуда[1] $\alpha_k(\lambda_k)^{s_0 p}=0$, $k=1, 2, \ldots$; то-есть, $\alpha_k=0$, $k=1, 2, \ldots$ Но тогда $y(x)\equiv 0$ в силу той же теоремы А. Ф. Леонтьева[1].

Перейдем теперь к вопросу о разрешимости задачи Коши.

Если нули λ_k удовлетворяют условию Q (см. теорему 5), то для разрешимости задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{C}\in N\Big(g(\lambda_k x),\ R\Big),$$

то-есть, чтобы

$$\tilde{C}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\Big[Q(\lambda_k x)+\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}e^{\varepsilon^j\lambda_k x}\Big],$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|\,e^{r|\lambda_k|}<\infty \quad \text{для всех} \quad r<R.$$

Критерий разрешимости и здесь можно выразить в терминах „расширенного" уравнения.

Развитые в этом пункте методы можно применить к более общему случаю задания последовательности $\{l_s\}$, когда

$$g(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{\alpha_k t}+P(t),$$

где $P(t)$ – многочлен.

п. 5. При решении задачи Коши интересно выяснить следующий вопрос: существуют ли последовательности $\{l_s\}$ натуральных чисел такие, что задача Коши (5) для уравнения (3) разрешима в A_R для любой функции $\tilde{C}(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_{l_s}}{(l_s)!}x^{l_s}$ из $A_{R,\Lambda}$, то-есть, для любой последовательности c_{l_s}, удовлетворяющей условию $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\sqrt[l_s]{\frac{|c_{l_s}|}{(l_s)!}}\leqslant\frac{1}{R}$. Во всех известных нам случаях удается дать отрицательный ответ на этот вопрос с помощью одной общей теоремы о необходимых условиях разрешимости задачи Коши, которую мы сейчас докажем.

Теорема 8. *Если $a(x)\in[1, 0]$ и имеет простые нули, то для разрешимости задачи Коши (5) необходимо, чтобы функция $\tilde{C}(x)$ принадлежала $E\Big(g(\lambda_k x),\ R\Big)$ – замыканию линейной оболочки системы $\{g(\lambda_k x)\}$ по естественной топологии A_R.*

Пусть $y(x)$ – решение задачи Коши (5) для уравнения (3) из A_R. Тогда равномерно внутри круга $|x|<R$

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}w_n(x),\quad w_n(x)=\sum_{k=1}^{p_n}a_{k,n}e^{\lambda_k x}=\sum_{k=1}^{p_n}a_{k,n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda_k)^j x^j}{(j)!}.$$

Отсюда при любом $m\geqslant 0$ и $r<R$

$$\left|\frac{y^{(m)}(0)}{m!}-\sum_{k=1}^{p_n}a_{k,n}\frac{(\lambda_k)^m}{m!}\right|<\frac{M(r,y-w_n)}{r^m}.$$

В частности,

$$\left|c_{l_s}-\sum_{k=1}^{p_n} a_{k,n}(\lambda_k)^{l_s}\right|<M(r,\ y-w_n)(l_s)!\,r^{-l_s},\qquad s=1,\ 2,\ \ldots$$

Положим

$$v_n(x)=\sum_{k=1}^{p_n} a_{k,n}\,g(\lambda_k x)$$

и оценим разность $v_n(x)-\tilde{C}(x)$. Пусть ρ любое число из $(0,\ R)$ и $r\in(\rho,\ R)$. Тогда

$$M(\rho,\ v_n-\tilde{C})\leqslant\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\rho^{l_s}}{(l_s)!}\left|c_{l_s}-\sum_{k=1}^{p_n} a_{k,n}(\lambda_k)^{l_s}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M(r,\ y-w_n)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{l_s}\leqslant\frac{M(r,\ y-w_n)\,r}{r-\rho}$$

и $v_n\to\tilde{C}$ равномерно в круге $|x|\leqslant\rho$, каково бы ни было $\rho<R$.

Следствие. Если $a(x)\in[1,\ 0]$ и имеет простые нули, а функции $g(\lambda_k x)$ усиленно линейно-независимы в A_R(12), то решение о.з.К. (5) из A_R (если оно существует) единственно в A_R.

Действительно, пусть $y(x)$ – решение уравнения (3) из A_R такое, что $y^{(l_s)}(0)=0$, $s=1,\ 2,\ \ldots$ Тогда, равномерно внутри круга $|x|<R$

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p_n} a_{k,n}e^{\lambda_k x}$$

и по теореме 8 равномерно внутри этого круга

$$0=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p_n} a_{k,n}\,g(\lambda_k x),$$

откуда(12) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k,n}=0$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ Из последних соотношений следует(1) что $y(x)\equiv 0$.

Во всех известных нам случаях $E\Big(g(\lambda_k x),\ R\Big)$ (и подавно множество $P_{\Lambda,R}$ функций из $A_{R,\ \Lambda}$, для которых задача Коши (5) разрешима) является собственным подмножеством $A_{R,\Lambda}$. Например, если $l_s=sp$, $s=0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots$, $p>1$, $a(x)\in[1,\ 0]$ и имеет простые нули, то любая функция из $E\Big(g(\lambda_k x),\ R\Big)$ $\Big($и в частности, $\tilde{C}(x)\Big)$ является, очевидно, решением уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{(kp)}(x)=0,$$

где

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{mp}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^p}{\lambda_k^p}\right)=\prod_{j=0}^{p-1} a(\varepsilon^j x)=\omega(x)\in[1,\ 0].$$

Заметим, что $\tilde{C}(x)$ удовлетворяет этому уравнению и в том случае, если нули функций $a(x)\in[1,\ 0]$ не обязательно простые. Действительно, если $y(x)$ — решение из A_R уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(x)=0, \qquad a(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in [1,\ 0]$$

и $|t|\leqslant 1$, то функция $v(x)=y(tx)$ будет решением (из A_R) уравнения $\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k v^{(k)}(x)=0$, если функция $d(tx)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k t^k x^k$ делится на $a(x)$ и если $d(x)\in[1,\ 0]$. Поэтому все функции $y(\varepsilon^j x)$, $0\leqslant j\leqslant p-1$ $\Big($а следовательно, и $\tilde{C}(x)=\frac{1}{p}\sum\limits_{j=0}^{p-1} y(\varepsilon^j x)\Big)$ будут решениями из A_R уравнения

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m v^{(mp)}(x)=0, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{mp}=\omega(x).$$

Таким образом, если $y(x)$ — решение (в A_R) о.з.К. (15) для уравнения (3) и если $a(x)\in[1,\ 0]$, то заданная часть решения $\tilde{C}(x)$ сама является решением из A_R уравнения

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m v^{(mp)}(x)=0, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{mp}=\prod_{j=0}^{p-1} a(\varepsilon^j x)$$

таким, что $v^{(j)}(0)=0$, когда $j\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p)$.

Из этого факта получаем ряд следствий, характеризующих специфические свойства заданной функции $\tilde{C}(x)$.

Следствие 1[9]. Если $a(x)\in[1,\ 0]$ и $y(x)$ — решение в $\tilde{A}_0$ о.з.К. (15), то функция $\tilde{C}(x)=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{c_{sp}}{(sp)!}x^{sp}$ всюду однозначна и ее область существования выпукла.

Следствие 2[10]. Если $a(x)\in[1,\ 0]$, $y(x)$ — решение из $\tilde{A}_0$ задачи Коши (15) и заданная функция $\tilde{C}(x)$ — целая, то $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,\ \tilde{C})}{r}\geqslant|\lambda_1|$. (В следствиях 1—2 не предполагается, что $a(x)$ имеет только простые нули).

Из этих результатов немедленно следует, что в данном случае $P_{\Lambda,R}$ является собственным подмножеством $A_{R,\Lambda}$ (в частности, $P_{\Lambda,R}$ не содержит ни одной функции из класса $[1,\ 0]$).

п. 6. Очевидно, что все полученные выше результаты остаются в силе, если начальные условия Коши задавать в точке $z_0\neq 0$: $y^{(l_s)}(z_0)=c_{l_s}$, $s=1,\ 2,\ \ldots$ и искать решение уравнения (3), аналитическое в круге $|z-z_0|<R$ (этот случай сводится к предыдущему заменой $z-z_0=t$). Более своеобразным оказывается тот случай, когда точка z_0, в которой задаются значения решения и некоторых его производных, является граничной точкой области существования решения. Поставим следующую задачу для уравнения (3).

Пусть I — область с границей (скажем, гладкой) S, и пусть Q_I — класс функций $v(z)$, аналитических в I и непрерывных вместе со всеми своими производными в $\bar{I}=I+S$. Требуется найти решение (в I) уравнения (3) из класса Q_I такое, что $y^{(l_s)}(z_0)=c_{l_s}$, $s=1, 2, \ldots$, где $z_0 \in S$, $\{l_s\}$ — последовательность натуральных чисел, c_{l_s} — заданные числа. Как мы сейчас убедимся, в случае, когда уравнение (3) не вырождается в уравнение конечного порядка, такого рода граничные задания не определяют решения, и следовательно, для уравнений бесконечного порядка нет прямого аналога известной теоремы Брио и Буке (дополненной Пикаром и Пенлеве) для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $a(x)$ — трансцендентная целая функция из класса $[1, 0]$ (не обязательно с простыми нулями). Выберем некоторую бесконечную последовательность ее нулей λ_k (каждый нуль берется только один раз, независимо от его кратности, так что $\lambda_k \neq \lambda_i$, если $k \neq i$). Пусть α — какой нибудь частичный предел последовательности $\{\arg \lambda_k\}$. Возьмем положительное число δ, $\delta<\frac{\pi}{2}$ и обозначим через $\Gamma_\delta(z_0)$ сектор

$$\frac{\pi}{2}-\alpha+\delta<\arg(z-z_0)<\frac{3}{2}\pi-\alpha-\delta,$$

а через $\overline{\Gamma_\delta(z_0)}$ — сектор

$$\frac{\pi}{2}-\alpha+\delta \leqslant \arg(z-z_0) \leqslant \frac{3}{2}\pi-\alpha-\delta.$$

Теорема 9. *Пусть $a(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ — трансцендентная целая функция из класса $[1, 0]$. Тогда, каковы бы ни были точка z_0 и заданные числа c_n, $n=0, 1, \ldots$, для любого как угодно малого $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ найдется функция $y(x)$ с такими свойствами:*

1) *$y(x)$ непрерывна вместе со всеми своими производными в $\overline{\Gamma}_\delta(z_0)$ и аналитична в любой точке $\Gamma_\delta(z_0)$, кроме, быть может, точки z_0;*

2) *$y(x)$ удовлетворяет уравнению (3) в любой точке $\overline{\Gamma}_\delta(z_0)$, кроме, быть может, точки z_0;*

3) *$y^{(n)}(z_0)=c_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Выберем подпоследовательность $\lambda_{n_k}=\mu_k$ так, чтобы

$$\alpha-\frac{\delta}{2}<\arg \mu_k<\alpha+\frac{\delta}{2}, \qquad k=1, 2, \ldots,$$

и рассмотрим вспомогательную систему

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(\mu_k)^n=c_n, \qquad n=0, 1, \ldots \tag{21}$$

Согласно одной теореме Полиа (см.[6], стр. 45) эта система (при любых c_n) имеет решение $\{d_n\}$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|\,|\mu_k|^n<\infty, \qquad n=0, 1, \ldots$$

Условия теоремы Полиа здесь выполнены, так как все μ_k, кроме, быть может, μ_1, отличны от нуля, и

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{\sum_{s=1}^{i-1} |\mu_m|^s}{|\mu_m|^i} \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} \frac{i\,|\mu_m|^{i-1}}{|\mu_m|^i} = 0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots$$

Составим функцию

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu_k (x-z_0)}.$$

Имеем

$$\operatorname{Re} \mu_k (z-z_0) = |\mu_k|\,|z-z_0| \cos\Big(\arg \mu_k + \arg (z-z_0)\Big).$$

Если $z \in \overline{\Gamma}_\delta(z_0)$, то

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \leqslant \Big(\arg \mu_k + \arg (z-z_0)\Big) \leqslant \frac{3}{2}\pi - \frac{\delta}{2},$$

и

$$\operatorname{Re} \mu_k (z-z_0) \leqslant -|\mu_k|\,|z-z_0| \sin\frac{\delta}{2} < 0.$$

Отсюда следует, во-первых, что если $x \in \overline{\Gamma}_\delta$, то

$$|\mu_k|^n\,|d_k|\,|e^{\mu_k (x-z_0)}| \leqslant |d_k|\,|\mu_k|^n,$$

все ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k (\mu_k)^n e^{\mu_k (x-z_0)}, \qquad n=0,\ 1,\ \ldots$$

равномерно сходятся в $\overline{\Gamma}_\delta$, и $y(x)$ непрерывна вместе со всеми своими производными в любой конечной точке $\overline{\Gamma}_\delta$. Во-вторых, из оценки (при $k \geqslant 2$)

$$|d_k|\,|e^{\mu_k (x-z_0)}| \leqslant |d_k|\, e^{-|\mu_k|\,|x-z_0| \sin\frac{\delta}{2}} \leqslant |d_k|\, e^{-\mu_2 |x-z_0| \sin\frac{\delta}{2}}$$

получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu_k (x-z_0)}$ сходится равномерно в окрестности любой точки $\overline{\Gamma}_\delta$, отличной от z_0, и, следовательно, $y(x)$ аналитична во всех точках сектора $\overline{\Gamma}_\delta$, кроме его вершины z_0. Выполнение условий $y^{(n)}(0) = c_n$, $n=0,\ 1,\ \ldots$ очевидно ввиду (21). Наконец, если $z \in \overline{\Gamma}_\delta$ и $z \neq z_0$, то равномерно в окрестности z

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k e^{\mu_k (x-z_0)} \equiv \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

и во всех точках этой окрестности (в том числе и точке z)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(x) \equiv Ly(x) \equiv \lim_{n\to\infty} Ly_n(x) = 0.$$

Замечание 1. Очевидно, что все секторы $\Gamma_\delta(z_0)$ конгруентны (при различных z_0).

Замечание 2. Если среди нулей $a(x)$ найдется бесконечное множество нулей с одинаковыми аргументами: $\arg \mu_k = \varphi$, то указанным в теореме способом можно построить функцию $y(x)$, которая аналитична в полуплоскости $\Gamma(z_0)$:

$$\frac{\pi}{2}-\varphi<\arg(z-z_0)<\frac{3}{2}\pi-\varphi,$$

непрерывна вместе со всеми своими производными в замкнутой полуплоскости $\bar{\Gamma}(z_0)$:

$$\frac{\pi}{2}-\varphi\leqslant\arg(z-z_0)\leqslant\frac{3}{2}\pi-\varphi,$$

удовлетворяет уравнению (3) в любой точке $\Gamma(z_0)$ и, кроме того,

$$y^{(n)}(z_0)=c_n, \qquad n=0,\ 1,\ \ldots$$

В заключение этого параграфа отметим, что все полученные в нем результаты переносятся на случай неоднородного уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(x)=f(x), \qquad f\in A_R. \tag{22}$$

Надо только воспользоваться тем обстоятельством, что уравнение (22) имеет частное решение $y_1(x)$ из $A_R^{(1)}$, и сделать замену $y(z)-y_1(z)=W(z)$.

§ 3. Случай, когда характеристическая функция принадлежит классу [1, σ]

п. 1. Рассмотрим теперь обобщенную задачу Коши для уравнения (3), предполагая, что $a(x)\in[1,\ \sigma]$, $0<\sigma<\infty$, то-есть,

$$a(x)=e^{\alpha x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\lambda_k}\right)e^{\frac{x}{\lambda_k}}.$$

Известно, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k|^{\rho}}<\infty$ для любого $\rho>1$ и что

$$\beta=\overline{\lim_{m\to\infty}}\,|\beta_m|<\infty, \quad \text{где} \quad \beta_m=\alpha+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\lambda_k}. \tag{4}$$

В работе Валирона[4] доказано, что если $y(x)\in A_R$ и удовлетворяет (3) в окрестности начала координат, то равномерно внутри круга $|z|<R-D-\beta$

$$y(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p_n} a_{k,n}e^{\lambda_k z}. \tag{23}$$

Здесь $D=\max\{\beta,\ K'\sigma\}$, а K' заключено между 1 и некоторой абсолютной постоянной (для $\sigma=0$, $D=0$ и $\beta=0$). Из представления (23), точно так же, как теорему 8 в случае $\sigma=0$, получаем такое утверждение.

Теорема 10. *Если* $y(x)$ — *решение задачи Коши* (5) *для* (3) *из* A_R, *где* $R>D+\beta$, *то* $\tilde{C}(x)\in E\left(g(\lambda_k x),\ R-D-\beta\right)$.

При определенных условиях, приведенных в (4), решение уравнения (3) представляется в виде ряда $y(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{\lambda_k z}$. Несколько иные условия разложимости можно получить с помощью результатов монографии[1]. Именно, составим функцию

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

где берутся все сомножители с попарно различными λ_n^2, и введем величины

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|F'(\lambda_n)|},\quad \overset{+}{\delta}=\frac{1}{2}[\delta+|\delta|],\quad \sigma_1=\pi\tau,\quad \tau=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\lambda_n|}\leqslant\sigma e.$$

Из результатов § 7 гл. 1 книги[1] следует, что если последовательность (23) сходится в круге $|z|<\rho$, где $\rho>\sigma_1+\overset{+}{\delta}$, а предельная функция $y(z)$ аналитична в круге $|z|<r+\sigma_1+\overset{+}{\delta}$, то $y(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e^{\lambda_k z}$, причем этот ряд сходится равномерно в круге $|z|<r$. В нашем случае $\rho=R-D-\beta$, а $r=R-\sigma_1-\overset{+}{\delta}$. Итак, если $y(z)$ аналитична в круге $|z|<R$, где $R>D+\beta+\sigma_1+\overset{+}{\delta}$, то равномерно внутри круга $|z|<R-\sigma_1-\overset{+}{\delta}$ справедливо разложение (13), причем

$$\alpha_k=\lim_{n\to\infty}a_{k,n},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Если, в частности, выполняется уже знакомое условие Q_1:

$$\lim_{n\to\infty}(|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|)>0,$$

то $\delta\leqslant 0$ и $\overset{+}{\delta}=0$. Отсюда, как в § 2, получаем такие результаты.

Теорема 11. *Если $y(x)$ — решение о.з.К. (5) для (3) из A_R, где $R>D+\beta+\sigma_1$, и выполняется условие Q_1, то*

$$\bar{C}(x)\in N\left(g(\lambda_k x),\ R-\sigma_1\right).$$

Следствие. Если выполняется условие Q_1 и функции $g(\lambda_k x)$ не допускают нетривиального разложения нуля в $N\left(g(\lambda_k x),\ R-\sigma_1\right)$, то решение о.з.К. в A_R, где $R>D+\beta+\sigma_1+\overset{+}{\delta}$, единственно.

Заметим еще, что, если $R>D+\beta+\sigma_1$, то последовательность (23) равномерно сходится в круге $|z|<r_1$, $r_1>\sigma_1$, а предельная функция $y(z)$ аналитична в круге $|z|<R$. Тогда согласно теореме 6 из § 4 главы I монографии[1] существует последовательность

$$\sum_{k=1}^{n-1}b_{k,n}e^{\lambda_k z}=Q_n(z),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

такая, что $y(z)=\lim_{n\to\infty}Q_n(z)$ равномерно внутри круга $|z|<R-\sigma_1$. Отсюда получаем такое уточнение теоремы 10.

Теорема 12. *Если $y(x)$ — решение о.з.К. (5) для (3) из A_R, где $R>D+\beta+\sigma_1$, то*

$$\bar{C}(x)\in E\left(g(\lambda_k x),\ R-\sigma_1\right).$$

(Отметим, что в этой теореме не предполагается, что условие Q_1 выполнено, лишь бы $a(x)\in[1,\ \sigma]$.)

Пусть теперь

$$g(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{x^{l_s}}{(l_s)!}\sim e^x \quad \text{и} \quad \tilde{C}(x)\in N\Big(g(\lambda_k x),\ r\Big),\quad r>\sigma,$$

то-есть,

$$\tilde{C}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k g(\lambda_k x),\quad \sum_{k=1}^{\infty}|d_k|\,M(\rho,\ g_k)<\infty \quad \text{для} \quad \rho<r.$$

Образуем функцию

$$y(x)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k x}.$$

Очевидно, что $y(x)\in A_r$ и удовлетворяет (3) в круге $|x|<r-\sigma$. Кроме того, из соотношений

$$\tilde{C}(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_{l_s}x^{l_s}}{(l_s)!}=\sum_{k=1}^{\infty} d_k\sum_{s=1}^{\infty}\frac{x^{l_s}(\lambda_k)^{l_s}}{(l_s)!},\quad y(x)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k x}$$

легко получаем, как и раньше, что

$$y^{(l_s)}(0)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k(\lambda_k)^{l_s}=c_{l_s},\qquad s=1,\ 2,\ \ldots$$

Теорема 13. *Если*

$$g(x)\sim e^x,\quad \tilde{C}(x)\in N\Big(g(\lambda_k x),\ R\Big),$$

где $R>\sigma$ *и* $a(x)\in[1,\ \sigma]$, *то в классе* A_R *существует решение о.з.К.* (5) *для* (3).

Наконец, можно рассмотреть неоднородное уравнение (22).

Если $f(x)\in A_{R+\sigma}$, то уравнение (22) имеет частное решение $y_1(x)$ из A_R, и замена $y(x)-y_1(x)=v(x)$ приводит к о.з.К. (5) для однородного уравнения (3).

п. 2. Как и в § 2, можно было рассмотреть случай граничных заданий, а также изучить более подробно некоторые специальные случаи общей задачи. Мы остановимся только на одном таком случае, когда $l_s=sp$, $s=0,\ 1,\ \ldots$

Докажем сначала теорему единственности.

Теорема 14. *Пусть* $a(x)\in[1,\ \sigma]$ *и все числа* λ_k^p *различны. Тогда, если* $y(x)\in A_R$, *где*

$$R>\max\left\{D+\beta+\sigma_1,\ 2\sigma_1,\ \sigma_1+\frac{\sigma_1}{\sin\frac{\pi}{p}}\right\},$$

удовлетворяет уравнению (3) *в окрестности начала координат и условиям* $y^{(sp)}(0)=0,\ s=s_0,\ s_0+1,\ \ldots,$ *то* $y(x)\equiv 0$.

Из теоремы 12 следует, что равномерно внутри $|x|<R-\sigma_1$

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} b_{k,n}e^{\lambda_k x}$$

откуда

$$y^{(s_0 p)}(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} b_{k,n}(\lambda_k)^{s_0 p}e^{\lambda_k x}$$

также равномерно внутри этого круга. Применим оператор

$$M_s(D)v\equiv\sum_{j=0}^{\infty} h_{j,s}v^{(jp)}(x)$$

с характеристической функцией

$$L_s(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{\infty}{}'\left(1-\frac{x^p}{\lambda_k^p}\right).$$

Имеем на основании[1] в круге $|x|<R-\sigma_1-\sigma_p$, где $\sigma_p=\dfrac{\pi\tau}{\sin\frac{\pi}{p}}$:

$$M_s(D)y^{(s_0 p)}(x)=\sum_{j=0}^{\infty} h_{j,s}y^{((j+s_0)p)}(x)=\lim_{n\to\infty} b_{s,n}(\lambda_k)^{s_0 p}L_s(\lambda_s)e^{\lambda_s x}.$$

Полагая $x=0$ и учитывая начальные условия, найдем:

$$0=\lim_{n\to\infty} b_{s,n},\qquad s=1,\ 2,\ \ldots$$

Отсюда, согласно следствию 2 теоремы 4 из § 4 главы I[1], получаем, что если $R-\sigma_1>\sigma_1$, то $y(x)\equiv 0$.

Предположение о том, что все числа λ_n^p различны, существенно. Действительно, если $a(x)\in[1,\ \sigma)$ и $\lambda_n^p=\lambda_m^p$, $\lambda_n\neq\lambda_m$, то функция $y(x)=e^{\lambda_n x}-e^{\lambda_m x}$ удовлетворяет уравнению (3) и нулевым начальным условиям $y^{(sp)}(0)=0$, $s=0,\ 1,\ \ldots$ (корни $a(x)$ в этом случае не обязательно простые). Таким образом, решение о.з.К. не единственно в любом классе $A_R\ (R>R^*)$, A_∞, $[1,\ \infty)$.

Укажем теперь одно необходимое условие разрешимости о.з.К. с условиями (15).

Теорема 15. *Пусть $y(x)$ – решение о.з.К. (15) для (3) из A_R, где $R>\max\{D+\beta+\sigma_1,\ 2\sigma_1\}=R_0$. Тогда область $D(0)$ на римановой поверхности функции $\tilde C(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_{sp}}{(sp)!}x^{sp}$, содержащая начало координат и все те (и только те точки) z_1 такие, что $\tilde C(x)$ аналитична в круге $|x-z_1|\leqslant\sigma_1$, односвязна и однолистна.*

Доказательство следует из того, что так как

$$\tilde C(x)\in E\left(g(\lambda_k x),\ R-\sigma_1\right),$$

то равномерно внутри круга $|z|<R-\sigma_1$

$$\tilde C(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} b_{k,n}e^{\lambda_k x}.$$

Но тогда по теореме 1 главы II из[1] получаем, что область $D(0)$ обладает указанными в теореме свойствами.

Покажем теперь, что в данном случае $P_{\Lambda, R}$ является собственным подмножеством $A_{R,\Lambda}$, то-есть, что задача Коши (15) разрешима в A_R не при всяком выборе чисел c_{sp}, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[sp]{\frac{|c_{sp}|}{(sp)!}} \leqslant \frac{1}{R}.$$

Возьмем функцию

$$y_0(x) = \frac{1}{1-(xq)^p}, \qquad q > \max\left\{ \frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\sigma_1},\ 2\sigma_1\ \ D+\beta+\sigma_1 \right\}.$$

Тогда, если о.з.К. с условиями $y^{(sp)}(0) = q^{sp}(sp)!$, $s = 0, 1, \ldots$, разрешима в классе A_R, где $R > R_0$, то область $D(0)$ для функции $y_0(x)$ однолистна и односвязна. Но легко заметить, что эта область однолистна, но не односвязна.

Точно так же, как в п. 4 § 2, условия разрешимости о.з.К. (15) можно выразить в терминах „расширенного" уравнения.

Напомним еще, что если

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in [1, \sigma], \quad c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in [1, \sigma_1]$$

и $y(x)$ – решение уравнения $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(x) = 0$, аналитическое в круге $|x| < R$, где $R > \sigma + \sigma_1$, то по теореме XVII из[4] $y(x)$ является решением уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(x) = 0, \quad b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = a(x)\cdot c(x),$$

в круге $|x| < R - \sigma - \sigma_1$. Поэтому, если $y(x)$ – решение из A_R уравнения (3), $a(x)$ – функция из $[1, \sigma]$ (не обязательно с простыми нулями), причем $R > p\sigma$, то любая функция $y(\varepsilon^j x)$ будет решением (из $A_{R-p\sigma}$) уравнения

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m v^{(mp)}(x) = 0,$$

где

$$\omega(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m x^{mp} = a(\varepsilon^j x) \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{p}{}' a(\varepsilon^k x), \qquad \omega(x) \in [1, p\sigma].$$

Используя результаты работ[10] и[13] (стр. 162), находим:

Теорема 16. *Пусть* $y(x)$ *– решение из* A_R *о.з.К.* (15) *для уравнения* (3), *характеристическая функция* $a(x)$ *которого принадлежит классу* $[1, \sigma]$, $\sigma < \infty$, $R > \sigma p$ (нули $a(x)$ не обязательно простые). *Тогда* а) *если заданная функция* $\tilde{C}(x)$ *всюду однозначна, то расстояние любой ее особой точки до другой ближайшей особой точки не превосходит* $2p\sigma$; б) *если* $\tilde{C}(x)$ *– целая функция, то* $\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, \tilde{C})}{r} \geqslant |\lambda_1|$ (и, следовательно, $[1, 0] \notin P_{\Lambda, R}$).

В заключение отметим, что методы данной работы позволяют решать обобщенную задачу Коши $D^{l_s}y(x)|_{x=0}=c_{l_s}$, $s=1, 2, \ldots$, для уравнения в обобщенных производных Гельфонда — Леонтьева

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k y(x)=0,\quad D^k y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+k}}\frac{y^{(n+k)}}{(n+k)!}(0),\qquad k=0,\ 1,\ \ldots$$

Ростовский Государственный
университет

Поступило в редакцию
4.II.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Леонтьев, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. института им. В. А. Стеклова, т. XXXIX, 1951.
2. J. F. Ritt, On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients, Transac. of the Amer. math. Soc., **18**, 1917, 27—49.
3. I. Polya, Eine Verallegemeinerung des Fabryschen Lückensatzes, Nachr. Gesellsch., Wissensch. Göttingen, 1927, 187—195.
4. I. Valiron, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants, Ann. scient. Ecole norm. super. (3), vol. 46, 1929, 25—53.
5. М. М. Драгилев, О регулярной сходимости базисных разложений аналитических функций, НДВШ, Физ. мат. науки, 1958, № 4, 27—32.
6. Р. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, ГИФМЛ, 1960.
7. В. И. Протасов, О решениях линейных уравнений бесконечного порядка в обобщенных производных, ДАН СССР, 1964, **154**, № 6, 1273—1275.
8. А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев, Об одном обобщении ряда Фурье, Мат. сб., 29, (71): 3, 1951, 477—500.
9. М. Г. Хапланов, Некоторые свойства аналитического пространства, ДАН СССР, 79, 1951, 929—932.
10. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М., — Л., 1952 г.
11. H. Muggli, Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit constanten Koeffitienten, Commentarii Mathematica Helvetici, 11 (1938), 151—179.
12. А. И. Маркушевич, О базисе в пространстве аналитических функций, Мат. сб., 17 (59), 1945, 211.
13. Ю. Ф. Коробейник, Об области определения аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка, Мат. сб. 64 (106): 2, 1964, 153—170.

BEGALINĖS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES KOŠI UŽDAVINYS

J. KOROBEINIKAS

(Reziumė)

Sakysime, kad $\{l_s\}$ yra natūralių skaičių seka. Autorius nagrinėja begalinės eilės diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais ir sprendžia apibendrintą Koši uždavinį: rasti lygties sprendinį $y(z)$, patenkinantį sąlygas $y^{(l_s)}(0)=c_{l_s}$, $s=1, 2, 3, \ldots$, kur $\{c_{l_s}\}$ yra duota skaičių seka.

ON THE CAUCHY'S PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL EQUATION OF INFINITE ORDER

J. KOROBEINIK

(Summary)

Let $\{l_s\}$ be some fixed subsequence of natural numbers. The author investigates the generalized Cauchy's problem for the differential equation of infinite order with constant coefficients, that determines the solution of this equation satisfying the conditions: $y^{(l_s)}(0)=c_{l_s}$, $s=1, 2, \ldots$, where numbers c_{l_s} are given.