I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1961

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ В ОДНОРОДНУЮ ЦЕПЬ МАРКОВА, В СЛУЧАЕ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

Пусть имеется однородная цепь Маркова $\{\xi(t),\ t=1, 2, 3, \ldots\}$ с произвольным множеством состояний Ω с выделенной на нем σ-алгеброй F подмножеств, переходными вероятностными функциями $P(\omega, A)$, где $\omega \in \Omega$, $A \in F$, и начальным распределением $P(A)$, $A \in F$.

Предположим, что коэффициент эргодичности цепи

$$\alpha^* = 1 - \sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} | P(\omega, A) - P(\tilde{\omega}, A) | > 0. \tag{1}$$

Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \tag{2}$$

последовательность случайных величин, связянных в однородную цепь Маркова, то есть $X_l = X\left(\xi(l)\right)$, $l = 1, \ldots, n, \cdots$, где действительная функция $X(\omega)$ определена на Ω и F-измерима. Пусть, далее,

$$P(A) = \int_{\Omega} P(\omega, A) P(d\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad A \in F.$$

Тогда абсолютное расспределение вероятностей $P(A)$, $A \in F$, будет стационарным, а случайные величины $X_l (l = 1, \ldots, n, \ldots)$ одинаково распределены. Предположим, что случайные величины $X_l (l = 1, \ldots, n, \ldots)$ принимают только целочисленные значения k с вероятностями

$$P_1(k) = P\{X_l = k\}, \quad (l = 1, \ldots, n, \ldots).$$

Будем считать, что удовлятворяется условие (ω), если общий наибольший делитель разностей $k' - k''$, для которых обе вероятности $P_1(k')$ и $P_1(k'')$ положительны, равен единице.

Обозначим

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

$$P_n(k) = P\{S_n = k\}, \quad F_n(x) = P\{S_n < x\}$$

и

$$F(x) = F_1(x).$$

Известно, что последовательность функций распределения $F_n(B_n x + A_n)$, где A_n и $B_n > 0$ — некоторые постоянные, может сходиться только к устойчивым законам (см. [3], стр. 401). Предположим, что $V_\alpha(x)$ — некоторый ненормальный устойчивый закон распределения с показателем $\alpha\,(0 < \alpha < 2)$, а $v_\alpha(x)$ — плотность вероятности этого закона. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $V_\alpha(x)$ и для последовательности (2) имеет место интегральная предельная теорема, т.е. для некоторой последовательности постояннных A_n и $B_n > 0$*

$$F_n(B_n x + A_n) \to V_\alpha(x), \quad n \to \infty, \tag{3}$$

и пусть, кроме того, выполнено условие (1).

Тогда для того, чтобы равномерно относительно k имело место соотношение

$$B_n P_n(k) - v_\alpha\left(\frac{k - A_n}{B_n}\right) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

необходимо и достаточно выполнение условия (ω).

Теорема 2. *Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с функцией распределения $F(x) = P\{x_1 < x\}$.*

Если для некоторой последовательности постоянных A_n и $B_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_k}{B_n} - A_n < x \right\} = V_\alpha(x) \tag{3'}$$

и для некоторых $0 < \nu \leqslant 1$ и $0 < \varepsilon' < \alpha$

$$\lim_{n\to\infty} n B_n^{-\nu - \min(1,\, \alpha - \varepsilon')} \sup_{\omega} \int\limits_{|X_1(\tilde\omega)| < B_n \tau} |X_1(\tilde\omega)|^{\nu} P(\omega,\, d\tilde\omega) = 0,$$

каково бы ни было $\tau > 0$, то при соблюдении условий (1) и (ω), равномерно относительно k имеет место соотношение (4). (Постоянные A_n и B_n в соотношениях (3) и (3′) одни и те же).

Локальные предельные теоремы в случае $\alpha = 2$, т.е. в случае нормального устойчивого закона, изучены в работе [3] для однородных и в работе [2] для неоднородных цепей Маркова.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$f_n(t) = M e^{itS_n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{itk} P_n(k).$$

Тогда

$$2\pi P_n(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\, e^{-itk}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_n^*(t)\, e^{-itz_{nk} B_n}\, dt$$

или

$$2\pi B_nP_n(k)=\int\limits_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-iz_{nk}t}f_n^*\left(\frac{t}{B_n}\right)dt,$$

где

$$z_{nk}=\frac{k-A_n}{B_n} \quad \text{и} \quad f_n^*(t)=e^{-itA_n}f_n(t),$$

(в дальнейшем мы будем писать z вместо z_{nk}, опуская индексы). Характеристическую функцию устойчивого распределения $V_\alpha(x)$ обозначим $g(t)$. Тогда по формуле обращения имеем

$$v_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-izt}g(t)\,dt.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$2\pi[B_nP_n(k)-v_\alpha(z)]=I_1+I_2+I_3+I_4\to 0$$

при $n\to\infty$. Здесь

$$I_1=\int\limits_{-A}^{A} e^{-izt}\left[f_n^*\left(\frac{t}{B_n}\right)-g(t)\right]dt, \quad I_2=\int\limits_{A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon B_n} e^{-izt}f_n^*\left(\frac{t}{B_n}\right)dt,$$

$$I_3=\int\limits_{\varepsilon B_n<|t|\leqslant\pi B_n} e^{-izt}f_n^*\left(\frac{t}{B_n}\right)dt \quad \text{и} \quad I_4=\int\limits_{|t|>A} e^{-izt}g(t)\,dt,$$

где A и ε — положительные постоянные, которые выбираются позднее.

Оценим каждый интеграл в отдельности.

По предположению условий теоремы функция $F_n(B_nx+A_n)$ сходится к закону $V_\alpha(x)$, поэтому при постоянном A равномерно относительно z $I_1\to 0$, когда $n\to\infty$.

Так как

$$|I_4|\leqslant 2\int\limits_{A}^{\infty} e^{-c|t|^\alpha}dt,$$

где $c>0$, (см. [1], стр. 177), то, выбрав достаточно большое A, интеграл $|I_4|$ можем сделать сколь угодно малым.

Оценим интеграл I_2. Функцию

$$f(t,\ \omega,\ A)=\int\limits_{A} e^{itX(\tilde{\omega})}P(\omega,\ d\tilde{\omega}), \quad \omega\in\Omega, \quad A\in\mathcal{F}$$

будем называть переходной характеристической функцией случайной величины X (см. [2]). Переходную характеристическую функцию суммы

$$S_{kl}=X_{k+1}+X_{k+2}+\ldots+X_l$$

обозначим $f_{kl}(t,\ \omega,\ \cdot)$. Тогда для любого набора целых чисел

$$1\leqslant l_1<l_2<\ldots<l_n\leqslant n$$

имеет место неравенство

$$|f_n(t)|\leqslant\|f_{0l_1}(t,\ \cdot)\|\cdot\sup_\omega\|f_{l_1l_2}(t,\ \omega,\ \cdot)\|\ldots\sup_\omega\|f_{l_{N-1}l_N}(t,\ \omega,\ \cdot)\|. \tag{5}$$

Здесь

$$\|f(t, \omega, \cdot)\| = \sup_{|\varphi_t| \leqslant 1} \left| \int_{\Omega} \varphi_t(\tilde{\omega}) f(t, \omega, d\tilde{\omega}) \right|,$$

где верхняя грань берется по всем возможным $\mathcal{F}$-измеримым комплексным функциям $\varphi_t(\cdot)$ таким, что $|\varphi_t(\cdot)| \leqslant 1$, (см. [2]).

Пусть $\|f_{l_{i-1}l_i}(t, \omega, \cdot)\|$ — один из множителей правой части неравенства (5). Если $P^{(k)}(\omega, \cdot)$ — вероятность перехода через k шагов и

$$f(t, X_l | X_{l-1}, X_{l+1}) = M(e^{itX_l} | X_{l-1}, X_{l+1})$$

условная характеристическая функция случайной величины X_l относительно случайных величин X_{l-1} и X_{l+1}, то

$$\|f_{l_{i-1}l_i}(t, \omega, \cdot)\| = \sup_{|\varphi_t| \leqslant 1} \left| \int_{\Omega} \varphi_t(\omega_1) f_{l_{i-1}l_i}(t, \omega, d\omega_1) \right| =$$

$$= \sup_{|\varphi_t| \leqslant 1} \left| \int_{\Omega} \varphi_t(\omega_1) \int_{\Omega} f_{l_{i-1}l_i-2}(t, \omega, d\omega_2) \int_{\Omega} f_{l_i-1l_i}(t, \omega_3, d\omega_1) f_{l_i-2l_i-1}(t, \omega_2, d\omega_3) \right| =$$

$$= \sup_{|\varphi_t| \leqslant 1} \left| \int_{\Omega} \varphi_t(\omega_1) e^{itX_{l_i}(\omega_1)} \int_{\Omega} f_{l_{i-1}l_i-2}(t, \omega, d\omega_2) \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\Omega} e^{itX_{l_i-1}(\omega_3)} P(\omega_3, d\omega_1) P(\omega_2, d\omega_3) \right| =$$

$$= \sup_{|\varphi_t| \leqslant 1} \left| \int_{\Omega} \varphi_t(\omega_1) e^{itX_{l_i}(\omega_1)} \int_{\Omega} f_{l_{i-1}l_i-2}(t, \omega, d\omega_2) \times \right.$$

$$\left. \times f\left(t, X_{l_i-1} | X_{l_i-2}(\omega_2), X_{l_i}(\omega_1)\right) P^{(2)}(\omega_2, d\omega_1) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega} \int_{\Omega} P^{(l_i - l_{i-1} - 2)}(\omega, d\omega_2) \left| f\left(t, X_{l_i-1} | X_{l_i-2}(\omega_2), X_{l_i}(\omega_1)\right) \right| P^{(2)}(\omega_2, d\omega_1) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\left| f(t, X_{l_i-1} | X_{l_i-2}, X_{l_i}) \right|\right) + \sup_{A \in \mathcal{F}} |P^{(l_i - l_{i-1} - 2)}(\omega, A) - P(A)|. \tag{6}$$

Подобрав в неравенстве (5)

$$l_i - l_{i-1} = l_{i+1} - l_i = \left[\frac{1}{\alpha^*} \ln^2 n\right] + 2, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

$$N = \left[\frac{n}{\left[\frac{1}{\alpha^*} \ln^2 n\right] + 2}\right],$$

находим

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} | P^{(l_i - l_{i-1} - 2)}(\omega, A) - P(A) | \leqslant (1 - \alpha^*)^{l_i - l_{i-1} - 2} \leqslant e^{-[\ln^2 n]}. \tag{7}$$

(Здесь и в дальнейшем символ $[x]$ означает целую часть x). Воспользовавшись неравенством

$$a \leqslant 1 - \frac{1}{2}(1 - a^2),$$

справедливым для любого a, получаем

$$\left|f(t, X_{l_i-1} | X_{l_i-2}, X_{l_i})\right| \leqslant 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \left|f(t, X_{l_i-1} | X_{l_i-2}, X_{l_i})\right|^2\right).$$

Тогда

$$M\left|f(t, X_{l_i-1} | X_{l_i-2}, X_{l_i})\right| \leqslant 1 - \frac{1}{2} M\left(1 - \left|f(t, X_{l_i-1} | X_{l_i-2}, X_{l_i})\right|^2\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} MD(e^{itX_{l_i-1}} | X_{l_i-2}, X_{l_i}). \tag{8}$$

Пусть Z_1, Z_2, Z_3 — действительные случайные величины, связанные в однородную цепь Маркова с произвольным множеством состояний Ω' с σ-алгеброй подмножеств $\mathcal{F}'$ множества Ω' и с коэффициентом эргодичности α^*. Пусть $f(Z_2)$ $\mathcal{F}'$-измеримая действительная функция от Z_2, для которой $\mathbf{D}f(Z_2) < \infty$. Тогда известно, что

$$\mathbf{MD}\left(f(Z_2) | Z_2, Z_3\right) \geqslant \frac{1}{32} \alpha^{*2} Df(Z_2)$$

(см. [2], гл. II лемма 2). Но последнее соотношение имеет место и для комплексной $\mathcal{F}'$-измеримой функции $f(Z_2)$ с конечной дисперсией, что следует из равенства

$$Df(Z_2) = D\left(\operatorname{Re} f(Z_2)\right) + D\left(\operatorname{Im} f(Z_2)\right).$$

Следовательно,

$$MD(e^{itX_{l_i-1}} | X_{l_i-2}, X_{l_i}) \geqslant \frac{1}{32} \alpha^{*2} D(e^{itX_{l_i-1}}) =$$

$$= \frac{1}{32} \alpha^{*2}\left(1 - |f(t, X_{l_i-1})|^2\right) = \frac{1}{32} \alpha^{*2}\left(1 - |f(t)|^2\right), \tag{9}$$

где

$$f(t, X_{l_i-1}) = f(t) = \int_{\Omega} e^{itX_{l_i-1}(\omega)} P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} dF(x).$$

Известно, что при достаточно малом ε для всех $|t| \leqslant \varepsilon$ справедливо неравенство

$$1 - |f(t)|^2 > 2c_0 \tilde{\chi}\left(\frac{1}{|t|}\right), \tag{10}$$

где

$$\tilde{\chi}(x) = 1 - \tilde{F}(x) + \tilde{F}(-x),$$
$$\tilde{F}(x) = F(x) * [1 - F(-x+0)]$$

и c_0 — положительная постоянная (см. [1], стр. 255).

Из соотношений (8) — (10) следует, что

$$M\left|f(t, X_{l_i-1} | X_{l_i-2}, X_{l_i})\right| \leqslant 1 - \frac{1}{32} c_0 \alpha^{*2} \tilde{\chi}\left(\frac{1}{|t|}\right). \tag{11}$$

Учитывая соотношения (5) — (8) и (11), а также то, что случайные величины X_l, $l = 1, \ldots, n$, одинаково распределены, получаем

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-\left[\frac{n}{\left[\frac{1}{\alpha^*} \ln^2 n\right] + 2}\right] \frac{1}{32} c_0 \alpha^{*2} \tilde{\chi}\left(\frac{B_n}{|t|}\right) + Ne^{-[\ln^2 n]}\right\}.$$

При достаточно больших n

$$n\tilde{\chi}\left(\frac{B_n}{|t|}\right) \sim |t|^{\alpha}$$

(см. [1], стр. 255). Отсюда для всех достаточно больших n

$$n\tilde{\chi}\left(\frac{B_n}{|t|}\right) \geqslant \frac{1}{2}|t|^{\alpha},$$

следовательно

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{32}\frac{c_0}{4}\alpha^{*2}\frac{|t|^{\alpha}}{\left[\frac{1}{\alpha^*}\ln^2 n\right]+2}+\frac{n}{\left[\frac{1}{\alpha^*}\ln^2 n\right]+2}e^{-[\ln^2 n]}\right\}$$

и

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-c\frac{|t|^{\alpha}}{\left[\frac{1}{\alpha^*}\ln^2 n\right]}\right\}, \tag{12}$$

когда $\ln^{\frac{4}{\alpha}} n \leqslant |t| \leqslant \varepsilon B_n$. Здесь $c=\frac{1}{32}\frac{c_0}{8}\alpha^{*2}>0$.

Оценим сверху функцию $\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|$ в интервале

$$A \leqslant |t| \leqslant \ln^{\frac{4}{\alpha}} n.$$

Пусть имеем набор целых чисел

$$k_0=0<l_0<k_1<l_1<\ldots<k_{N'}<l_{N'}\leqslant n,$$

где

$$k_i-l_{i-1}=l_i-k_i=m, \quad n-l_{N'}<2m, \quad N'=\left[\frac{n}{2m}\right].$$

Поступая аналогично, как и при выводе соотношений (5) — (9) (см. [2]) получаем

$$\|f_{l_{i-1}l_i}(t,\omega,\cdot)\| \leqslant M\left(\left|f(t, S_{k_il_i}|X_{k_i}, X_{l_i})\right|\right)+e^{-\alpha^* m} \leqslant$$
$$\leqslant 1-\frac{1}{2}M\left(1-\left|f(t, S_{k_il_i}|X_{k_i}, X_{l_i})\right|^2\right)+e^{-\alpha^* m} \leqslant$$
$$\leqslant 1-\frac{1}{64}\alpha^{*2}\left(1-\left|f_m(t)\right|^2\right)+e^{-\alpha^* m}$$

и

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{64}\alpha^{*2}N'\left(1-|f_m(t)|^2\right)+N'e^{-\alpha^* m}\right\}. \tag{13}$$

Согласно интегральной теореме, для всех $|t| \leqslant A$

$$\left|f_m\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \to e^{-c|t|^{\alpha}}, \quad (m\to\infty),$$

или

$$\left|f_m\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| = e^{-c|t|^{\alpha}\frac{B_m^{\alpha}}{B_n^{\alpha}}}+o(1)$$

для всех $|t| \leqslant \frac{AB_n}{B_m}$, где $c>0$. Поэтому найдется такое число m_0, что при $m \geqslant m_0$ и $\frac{B_n}{(4c)^{\frac{1}{\alpha}}B_m} \leqslant |t| \leqslant \frac{B_n}{(2c)^{\frac{1}{\alpha}}B_m}$

$$\left|f_m\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant e^{-\frac{c}{2}|t|^{\alpha}\frac{B_m^{\alpha}}{B_n^{\alpha}}}.$$

Воспользовавшись неравенством

$$e^{-x} \leqslant 1-\frac{x}{2},$$

справедливым для любых $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, получаем

$$\left|f_m\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^2 \leqslant 1 - \frac{c}{2}|t|^\alpha \frac{B_m^\alpha}{B_n^\alpha} \tag{14}$$

при $m \geqslant m_0$ и $\frac{B_n}{(4c)^{\frac{1}{\alpha}} B_m} \leqslant |t| \leqslant \frac{B_n}{(2c)^{\frac{1}{\alpha}} B_m}$. Тогда из соотношений (13) и (14) при $m \geqslant m_0$ в области

$$\frac{B_n}{(4c)^{\frac{1}{\alpha}} B_m} \leqslant |t| \leqslant \frac{B_n}{(2c)^{\frac{1}{\alpha}} B_m} \tag{15}$$

следует оценка

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{64}\alpha^{*2}\frac{c}{2}|t|^\alpha \frac{B_m^\alpha}{B_n^\alpha}\left[\frac{n}{2m}\right] + \frac{n}{2m}e^{-\alpha^* m}\right\}. \tag{16}$$

Целое число $m = m(t, n)$, зависящее от t и n, в неравенстве (16) подберем таким, чтобы удовлетворялось условие (15), то есть чтобы было

$$\frac{1}{(4c)^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant \frac{|t| B_{m(t,n)}}{B_n} \leqslant \frac{1}{(2c)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{17}$$

для любого $t \left(A \leqslant |t| \leqslant \ln^{\frac{4}{\alpha}} n\right)$. Отсюда в силу условий (16) и (17) при достаточно больших $n \left(n \geqslant n_0\right.$, где n_0 определяется соотношением $m_0(t, n) = \left.= m(t, n_0)\right)$ получаем

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}\alpha^{*2}\frac{c}{2}|t|^\alpha \frac{B_{m(t,n)}^\alpha}{B_n^\alpha}\frac{n}{2m(t, n)}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-c'c|t|^\alpha \frac{B_{m(t,n)}^\alpha}{B_n^\alpha}\frac{n}{m(t, n)}\right\} \leqslant e^{-\frac{c'}{4^c}\frac{n}{m(t,n)}} \tag{18}$$

для любого $t \left(A \leqslant |t| \leqslant \ln^{\frac{4}{\alpha}} n\right)$, где $c' = \frac{1}{8}\frac{1}{64}\alpha^{*2}$.

Очевидно, найдется такое положительное число t_0, что при всех $|t| \geqslant t_0$ и достаточно больших n будет иметь место неравенство

$$\frac{n}{m(t, n)} \geqslant 4\ (1 + \delta)\frac{2}{c'\alpha}\ln\frac{n}{m(t, n)},$$

где постоянная $\delta > 0$. Отсюда, воспользовавшись соотношением (16) и тем, что $B_n = h(n)n^{\frac{1}{\alpha}}$, где $h(n)$ медленно изменяющаяся функция, то есть

$$\lim\frac{h(kn)}{h(n)} = 1, \qquad n \to \infty,$$

для любого целого $k > 0$ (см. [3], стр. 401), имеем

$$\frac{n}{m(t, n)} \geqslant \frac{4}{c'}(1 + \delta)\left(\ln\frac{h(n)}{h\left(m(t, n)\right)} + \frac{1}{\alpha}\ln\frac{n}{m(t, n)} + \ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{4\ (1 + \delta)}{c'}\ln\frac{B_n}{2B_{m(t,n)}} \geqslant \frac{4\ (1 + \delta)}{c'}\ln|t| \tag{19}$$

при $t\,(t_0 \leqslant |t| \leqslant \ln^{\frac{4}{\alpha}} n)$. Так как всегда можем выбрать $A > t_0$, то из соотношений (18) и (19) получаем

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| < \frac{1}{|t|^{1+\delta}}, \qquad \delta > 0, \tag{20}$$

при достаточно больших n и любого $t\,(A \leqslant |t| \leqslant \ln^{\frac{4}{\alpha}} n)$. Тогда в силу неравенств (12) и (20) посредством выбора A, ε и n интеграл $|I_2|$ может быть сделан как угодно малым.

Осталось оценить интеграл I_3. Так как в силу условия (ω) $f(t)$ есть характеристическая функция случайной величины, имеющей решетчатое распределение с максимальным шагом 1, то для всех $\varepsilon B_n \leqslant |t| \leqslant \pi B_n$ найдется такая постоянная $0 < \beta < 1$, что

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^2 \leqslant 1-\beta.$$

Тогда согласно соотношениям (5) — (9) имеем

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| < e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}\alpha^{*2}\beta N} = e^{-c''N},$$

где

$$c'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}\alpha^{*2}\beta, \qquad N = \left[\frac{n}{\left[\frac{1}{\alpha^*}\ln^2 n\right]+2}\right],$$

и $|I_3| \to 0$, когда $n \to \infty$.

Необходимость условий теоремы доказывается таким же путем, как и для независимых случайных величин (см. [1], стр. 248 — 256). Теорема доказана.

Так как из условий теоремы 2 следует интегральная теорема (см. [3], стр. 406, теорема 2.3), то доказательство теоремы 2 сводится к доказательству теоремы 1.

В заключение выражаю благодарность В. А. Статулявичюсу за постановку задачи и ценные указания при её решении.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
10. IV. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
2. В. А. Статулявичюс, Локальные предельные теоремы для неоднородных цепей Маркова. Кандидатская диссертация, 1958 (Отпечатано в Лит. мат. сб., 1—2).
3. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее применения, 2, 4, 1957, стр. 389—416.

LOKALINĖ RIBINĖ TEOREMA ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ, SURIŠTŲ HOMOGENINE MARKOVO GRANDINE, SUMOMS STABILAUS RIBINIO DĖSNIO ATVEJU

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Reziumė)

Nagrinėjama (2) seka vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, surištų homogenine Markovo grandine su bet kokia būvių aibe Ω, jos poaibių σ-algebra $\mathcal{F}$ ir perėjimo tikimybėmis $P(\omega, A)$, $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{F}$. Priimama, kad atsitiktiniai dydžiai X_l, $(l=1, \ldots, n, \ldots)$, turi gardelinį pasiskirstymą su maksimaliu žingsniu 1. Tegul

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

$$P_n(k) = \mathbf{P}\{S_n = k\}, \qquad F_n(x) = \mathbf{P}\{S_n < x\}$$

ir $V_\alpha(x)$ – stabilus pasiskirstymo dėsnis su rodikliu α $(0 < \alpha < 2)$ ir tikimybiniu tankiu $v_\alpha(x)$. Tada, jei patenkintos (1) ir (3) sąlygos, galioja (4) pareinamybė.

THE LOCAL LIMIT THEOREM FOR SUMS OF RANDOM VARIABLES DEFINED ON A HOMOGENEOUS MARKOV CHAIN IN THE CASE OF THE STABLE LIMIT DISTRIBUTION LAW

A. ALESHKEVITCHENE

(Summary)

We consider the sequence (2) of identically distributed random variables defined on a homogeneous Markov chain with any set of states Ω, with a σ-algebra $\mathcal{F}$ of its subsets and with transition probabilities $P(\omega, A)$, $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{F}$. We suppose that random variables in the sequence (2) have a lattice distribution with a maximal span 1. Let it be

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

$$P_n(k) = \mathbf{P}\{S_n = k\}, \qquad F_n(x) = \mathbf{P}\{S_n < x\}$$

and $V_\alpha(x)$ is a stable law of distribution with exponent α $(0 < \alpha < 2)$ and probability density $v_\alpha(x)$. Then, if conditions (1) and (3) are observed, the relation (4) holds.