

## Informatikos konkurso grafų uždavinių analizė

### Valentina Dagiienė

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto profesorė  
Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics, Professor  
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius  
El. paštas: valentina.dagiene@mii.vu.lt

### Gabrielė Stupurienė

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto doktorantė  
Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics, Doctoral Student  
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius  
El. paštas: gabriele.stupuriene@mii.vu.lt

### Elena Sutkutė

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto studentė  
Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Master Student  
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius  
El. paštas: elena.sutkute@mif.stud.vu.lt

*Straipsnyje nagrinėjamas informatikos ir informacinių technologijų konkurso „Bebras“ pastarųjų penkerių metų uždavinių, susijusių su grafais, sprendimas. Nei bendrojo ugdymo mokyklos matematikos programoje, nei dabartiniame informacinių technologijų kurse grafams neskiriama dėmesio, nors realiame gyvenime jų nuolatos prireikia. Grafų uždaviniai sudaro nemažą dalį informatikos konkurso „Bebras“ uždavinių, jie skiriami įvairaus amžiaus mokiniams. Atlikta analizė parodė, kad uždaviniai aprėpia įvairias grafų temas: supažindinama su grafo sąvoka ir vizualizavimu, ieškoma trumpiausio kelio, atliekama paieška į gylį arba į plotį, apdorojamas dvejetainis medis, ieškoma galimų kelių, taikomi srautų, keliaujančio pirklio ir panašūs algoritmai. Mokiniai, nors ir formaliai nesimoko grafų teorijos, mokykloje nesprendžia grafų uždavinių, tačiau dalyvaudami konkurse „Bebras“ tokias užduotis mėgsta spręsti, ypač interaktyvias. Atlikus analizę paaiškėjo, kad konkurso metu daugiausia pateikiama grafų uždavinių, kurie susiję su kelio paieška.*

**Pagrindiniai žodžiai:** informatikos mokymas, žaidybinimas, konkursas „Bebras“, informacinės technologijos, informatinis mąstymas, grafų uždaviniai.

## Įvadas

Šiandien dauguma mokinių ateina į mokyklą vienaip ar kitaip susipažinę su šiuolaikinėmis technologijomis. Naujoji karta geba greitai rasti reikiamą informaciją, noriai bendrauja socialiniuose tinkluose (Stupurienė, Sutkutė, 2014). Tačiau sumaniam technologijų naudojimui nepakanka vien įgūdžių – būtina giliau išmanyti informatikos principus ir sąvokas, suprasti kompiuterio veikimą. Siekiant skatinti mokinių domėjimąsi informatika ir gilinti jų gebėjimus, buvo parengtas informatikos ir informacinių technologijų konkurso „Bebras“ modelis.

Konkursai ir varžybos – nuo seno naudojama, vaikus įtraukianti ir motyvuojanti žinių ir įgūdžių tikrinimo forma. Mokyklose gausu įvairių konkursų, varžybų, dauguma jų skirti gabiesiems – tai įvairių dalykų olimpiados. 2004 metais pirmą kartą surengtas informatikos konkursas „Bebras“, skirtingai nei olimpiados, skirtas visiems mokiniams ir iki šiol sulaukia didelio susidomėjimo. „Bebro“ konkurso uždaviniai pateikiami taip, kad juos galėtų spręsti visi besidomintys informacinėmis technologijomis ir, svarbiausia, sprendami gilintų technologijų pagrindų supratimą. Uždaviniais perteikiami pagrindiniai informatikos konceptai, siekiama sudominti ir motyvuoti mokinius informatikos dalyku. Nemaža dalis konkurso uždavinių „slepia“ įvairius grafų teorijos konceptus ir pagrindinius algoritmus.

Pastaruoju metu daug kalbama apie žaidybinimo (angl. *gamification*) metodą, aktyvų, patrauklų mokiniams mokymosi būdą. Žaidybinimas – tai programos temų mokymas ar mokymasis, teorinių principų perteikimas naudojant žaidimo elementus. Iš tikrųjų, tai ugdantys, informaciją perteikiantys žaidimai, kuriems galima priskirti ir informatikos konkurso „Bebras“ uždutis.

Informatikos konkursas „Bebras“ (Lietuvoje įprasta vadinti informatikos ir informacinių technologijų konkursu, žr. [www.bebbras.lt](http://www.bebbras.lt)) – tarptautinis judėjimas informatikos ir kompiuteriniam išsilavinimui, informatiniam mąstymui ugdyti. Konkursas skirtas 3–12 klasių mokiniams, nemažai dėmesio skiriama informatikos, informacinių technologijų mokytojams, jie skatinami perteikti informatikos konceptus, domėtis informatikos pagrindais. 2014 metais konkurse dalyvavo arti milijono mokinių iš daugiau kaip 30 šalių. Užduotys atliekamos ir testuojamos internetinėmis priemonėmis.

Apie informatinį mąstymą (angl. *computational thinking*) kalbama jau beveik dešimtmetį. Informatinio mąstymo ir problemų sprendimo įgūdžiai labai svarbūs šiuolaikiniam jaunimui, šie įgūdžiai jiems būtini, kad geriau ir efektyviau atliktų įvairias kasdienes veiklas, sumaniau naudotųsi šiuolaikinėmis mokomosiomis priemonėmis ir metodais. Informatinis mąstymas apibrėžiamas kaip mąstymo procesas, kuris dalyvauja formuluojant problemas ir jų sprendimo būdus (Wing, 2011).

CSTA (*Computer Science Teacher Association*) ir ISTE (*International Society for Technology Education*) 2009 metais išskyrė devynias pagrindines informatinio mąstymo kategorijas (Barr, Stephenson, 2011):

1. *Duomenų rinkimas*: tam tikros informacijos kaupimas ir tinkamos atrinkimas.
2. *Duomenų analizė*: duomenų apdorojimas, šablonų atradimas, išvadų darymas.
3. *Duomenų atvaizdavimas*: duomenų tvarkymas ir vaizdavimas grafais, diagramomis, tekstu, paveikslais, lentelėmis ir pan.
4. *Problemų dekomponavimas*: uždavinio skaidymas į mažesnius komponentus ir skaidinių sujungimas.

5. *Algoritmavimas*: žingsnių sekų planavimas ir organizavimas problemai išspręsti.
6. *Abstrakcija*: sudėtingumo mažinimas apibrėžiant pagrindinę idėją, suformuojant charakteristikas ir kuriant modelius.
7. *Simuliavimas*: modeliavimo ar simuliacijos naudojimas, pavyzdžiui, eksperimentams atlikti.
8. *Automatizavimas*: atpažinimas, kaip technologijos gali mums padėti spręsti naujus uždavinius, kurie kitaip būtų besikartojantys, neįvykdomi ar pernelyg sunkūs.
9. *Lygiagretumas*: išteklių organizavimas problemai išspręsti ir tikslui pasiekti, naudojant sinchroninio perdavimo ir bendradarbiavimo priemones.

Grafų uždaviniai ypač būdingi duomenų atvaizdavimo, duomenų analizės, algoritmavimo ir abstrakcijos kategorijose, čia juos lengviau sukurti, jie geriau išreiškia pagrindinius šių kategorijų konceptus.

Asociacija „Computing At School“ Jungtinės Karalystės mokykloms nuo devintos klasės siūlo pradėti gabesnius mokinius papildomai supažindinti su grafo sąvoka ir taikymo galimybėmis (Computing at School, 2012).

*Straipsnio tyrimo objektas* – informatikos konkurso „Bebras“ grafų uždaviniai, jų klasifikacija, apibūdinimas, mokinių sprendimų analizė.

*Tyrimo tikslas* – išanalizuoti informatikos konkurso uždavinius, susijusius su grafais.

*Tyrimo uždaviniai*: 1) peržiūrėti 2010–2014 metų informatikos konkurso „Bebras“ uždavinius ir atrinkti turinčius grafų teorijos elementų, 2) atlikti konkurso grafų uždavinių analizę, 3) panagrinėti grafų uždavinių sprendimus įvairiose mokinių amžiaus grupėse.

*Tyrimo metodai*: su grafų teorija ugdymo kontekste susijusios literatūros analizė, lyginamoji uždavinių analizė, statistinis duomenų apdorojimas.

## **Grafo samprata formaliajame ir neformaliajame ugdyme**

Grafų teorija – gana nauja ir plati diskrečiosios matematikos sritis, reikšmingai taikoma informatikoje, tačiau bendrojo ugdymo matematikos, taip pat ir informacinių technologijų programose grafai nenagrinėjami. Mokykloje su grafų teorija supažindinami tik gabieji mokiniai (Informacinių technologijų..., 2012), besirengiantys informatikos olimpiadoms. Daug dėmesio grafams skirta tarptautinėje informatikos olimpiadų programoje (The International..., 2013). Vis dėlto Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla grafams skiria nemažą dėmesį, nevengia pateikti sudėtingesnių grafų užduočių (Maliaukienė, Šinkūnas, 2001).

Grafai ir medžiai minimi Lietuvos mokinių informatikos olimpiados programoje, sudarytoje pagal tarptautinės informatikos olimpiados programą. Norintys pasirengti olimpiadai, gali rinktis Kauno technologijos universiteto Jaunųjų kompiuterininkų mokyklos siūlomus programavimo kursus, apimančius ir grafų teorijos studijas, arba ruoštis savarankiškai.

Grafų teorija nėra bendrojo ugdymo programų turinio dalis. Gabieji ir neformalųjį ugdymą pasirinkę mokiniai sužino apie grafų teoriją ne pamokose. Kyla klausimas, ar grafų teorija negalėtų sudominti visų mokinių. Žinoma, tai nėra elementari diskrečiosios matematikos sritis, tačiau pagrindinius principus ir gyvenimiškas problemas sprendžiančius algoritmus būtų galima pristatyti visiems.

Viena iš daugelį metų vykdomų neformaliojo ugdymo formų – informatikos

konkursas „Bebras“, kuriame pateikiami patrauklūs, mąstymą skatinantys uždaviniai. Informatikos konkurso patraukliomis užduotimis grafų teorija yra atskleidžiama visiems konkurso dalyviams.

2015 metų sausio mėn. vyko konkurso „Bebras“ antras etapas, į kurį pakviesti geriausiai pirmame etape pasirodę 9–12 klasių mokiniai. Jiems buvo pateikta apklausa, kad atsakytų, kokie informatikos konceptai slepiasi užduotyje. Atlikta apklausa atskleidžia, kad ne visi mokiniai žino, kas yra grafas (Informatikos konkurso „Bebras“ II etapo apklausos duomenys, 2015), nes tik 21 iš 85 apklaustų juniorų grupės mokinių ir 62 iš 123 apklaustų senjorų grupės mokinių teisingai pažymėjo atsakymą. Sudarant konkurso užduotis siekiama, kad skirtingas žinias ir įgūdžius turintys mokiniai turėtų lygias galimybes dalyvaudami konkurse, išankstinės žinios neturėtų palengvinti uždavinio sprendimo.

## Tyrimo metodologija

Šiame straipsnyje apžvelgiami 2010–2014 metais konkurse „Bebras“ naudoti uždaviniai pagal tematiką, kreipiamas dėmesys tik į su grafų teorija susijusius uždavinius.

Kitas aspektas – išanalizuoti 12-os uždavinių, kurie susiję su grafų teorija ir buvo pateikti 2014 metų konkurse, sprendimus.

Statistinė analizė buvo atliekama naudojant 2014 metais dalyvavusių mokinių rezultatus (iš viso dalyvavo 24 985 mokiniai). Naudojami klasės, lyties ir teisingo atsakymo duomenys.

## Grafų uždavinių tematikos įvairovė

Iš informatikos konkurse „Bebras“ 2010–2014 metais naudotų daugiau kaip 200 užduočių rasta, kad su grafų teorija susiję 57 uždaviniai. 1 lentelėje pateikiamas užduočių pavadinimas, amžiaus grupė, kuriai buvo skirta užduotis (M – mažyliai (3, 4 kl.), B –

1 lentelė. *Su grafų teorija susijusių užduočių sąrašas*

Nr:	Pavadinimas	Amžiaus grupė	Užduočių charakteristika: raktiniai žodžiai, informatikos konceptai
1.	Anglų kalbos mokymasis	K, J, S	Baigtinio automato, vaizduojamo grafų, samprata.
2.	Aplankyk draugus	S	Dvejetainis medis, skaičiavimai medyje, baigtinis ciklas.
3.	Aprangos kodas	K	Sprendimo medis, kelio atpažinimas medyje.
4.	Aukščiausias medis	B, K	Grafo atpažinimas, vietinės paieškos (optimizavimo) algoritmas.
5.	Bebrai kino teatre	K, J, S	Svorinis grafas, optimizavimo algoritmas.
6.	Bebrai prie upės	B	Grafo atpažinimas, tilto paieška.
7.	Bebras grįžta namo	S	Jungusis grafas, trumpiausiojo ir ilgiausiojo kelio paieška.
8.	Bebras kanojoje	S	Dvejetainis medis, pilnasis dvejetainio medžio peržiūros metodas, paieškos į gylį algoritmas.
9.	Bebras keliauja į parduotuvę	K, J	Grafo apdorojimas, trumpiausiojo kelio paieška.
10.	Bebras pramogauja	K, J	Trumpiausiojo kelio paieška. Uždavinys interaktyvus.
11.	Bebrijos debesis	J, S	Orientuotasis grafas, paieška grafe, duomenų saugumas.
12.	Bebro draugai	B	Grafo vaizdavimas medžiu, srauto uždavinys.
13.	Bebrų rąstai	S	Optimizavimo algoritmas, maksimalaus srauto tinkle uždavinys, orientuotasis grafas.
14.	Bobo geriausia strategija	J, S	Sprendimų medis, jungusis neturintis ciklų grafas.
15.	Ceremonija	K, J, S	Topologinis grafo rikiavimas.

<i>Nr.</i>	<i>Pavadinimas</i>	<i>Amžiaus grupė</i>	<i>Užduoties charakteristika: raktiniai žodžiai, informatikos konceptai</i>
16.	Domino kaladėlės	J	Grafo atpažinimas, Oilerio maršrutas. Uždavinys interaktyvus.
17.	Draugai (2011 m.)	S	Jungusis grafas, socialiniai tinklai, tinklo etiketas.
18.	Draugai (2012 m.)	B, S	Grafo vaizdavimas, grafo sudarymas.
19.	Draugystė	J	Tinklas, grafo kodavimas, gretimumo matrica. Uždavinys interaktyvus.
20.	Dūmų signalas	B, K, J, S	Trumpiausiojo kelio paieška, jungusis grafas, paieškos į plotį algoritmas.
21.	Dvejetainis medis	B, K	Duomenų struktūra, dvejetainis medis.
22.	Eismas mieste	B	Gretutinumo matrica, grafo kodavimas.
23.	Garsiakalbiai miestelyje	B, K, J	Tinklas, grafo kodavimas. Uždavinys interaktyvus.
24.	Gelbėjimo veiksmai	B	Jungusis neturintis ciklų grafas, rekursija, optimizavimo algoritmas.
25.	Grupinis darbas	K, J, S	Orientuotasis grafas, procesai, operacinės sistemos.
26.	Iš žaidimo kauliuko į grafa	K, J	Informacijos atvaizdavimas: nuo realaus objekto iki modelio.
27.	Išdykęs bebras	M, B	Grafo atpažinimas, grafo jungumo ir nejungumo samprata, tiltas.
28.	Karoliai	K, J	Svorinis grafas, trumpiausiojo kelio paieška.
29.	Kelias į viršūnę	S	Grafo atpažinimas, trumpiausiojo kelio paieška
30.	Kelionė upeliais aukštyne	B, K	Svorinis grafas, trumpiausiojo kelio paieška, Dijkstros algoritmas.
31.	Kirtavietė	S	Grafo kodavimas, kombinatorika. Uždavinys interaktyvus.
32.	Labirintas beržo tošyje	B, K, J, S	Kelio paieška dvejetainiame medyje.
33.	Madingi dviračiai	B	Sprendimo medis, jungusis grafas, neturintis ciklų.
34.	Minimalus studijų laikas	S	Orientuotasis grafas, trumpiausiojo kelio paieška.
35.	Miško medžiai	M, B	Grafo samprata, paieška į gylį, galimų kelių paieška.
36.	Morzės abėcėlė	M, B	Dvejetainis medis, grafo vaizdavimas.
37.	Naujienos	K	Orientuotasis grafas, tilto paieška.
38.	Orientavimosi varžybos	S	Orientuotasis grafas, kilpos, galimų kelių paieška.
39.	Pašto karieta	B, K, J	Orientuotasis grafas, keliaujančio pirklio uždavinys.
40.	Patvarus tinklas	K, J, S	Grafo kodavimas, tinklo topologija.
41.	Pėdavimas	J, S	Dvejetainis medis, rekursija, fraktalai.
42.	Riešutai	M	Orientuotasis grafas, išplėstinė paieška, srauto uždavinys.
43.	Rikiavimo schemas	K, S	Grafo atpažinimas, rikiavimas.
44.	Saldainių rinkimas	J, S	Grafo atpažinimas, srautų uždavinys.
45.	Salos ir tiltai	S	Grafų atpažinimas ir sudarymas.
46.	Slaptažodis kompiuteriui	J, S	Orientuotasis grafas.
47.	Spalvotas kelias	M	Grafo atpažinimas. Uždavinys interaktyvus.
48.	Statom tiltus!	B, S	Kruskalo algoritmas, Primo algoritmas, jungusis grafas, minimalaus dengiančio/aprėpiančio medžio radimas. Uždavinys interaktyvus.
49.	Stebuklingas įrenginys	S	Grafo atpažinimas, Petri tinklas, algoritmavimas.
50.	Sukti kairėn negalima	J, S	Svorinis grafas, trumpiausiojo kelio paieškos algoritmas.
51.	Susitikimas	J, S	Svorinis grafas, trumpiausiojo kelio paieška, Dijkstros algoritmas. Uždavinys interaktyvus.

Nr.	Pavadinimas	Amžiaus grupė	Užduoties charakteristika: raktiniai žodžiai, informatikos konceptai
52.	Šaligatvis	K, J, S	Grafo samprata, grafo atpažinimas turint realų objektą.
53.	Tiltai	K, J	Grafo atpažinimas, optimalaus kelio paieška.
54.	Trumpiausias kelias	J	Grafo atpažinimas, kombinatorika.
55.	Upės ir užtvankos	K, J	Orientuotasis grafas, optimizavimas, Fordo–Fulkersono algoritmas.
56.	Upės tikrinimas	J, S	Srautų uždavinys, orientuotasis grafas.
57.	Žemėlapių vaizdavimas	J, S	Grafo kodavimas ir atpažinimas.

2 lentelė. Užduočių skaičius pagal amžiaus grupes

Grupė	Mažyliai	Benjaminai	Kadetai	Juniorai	Senjorai
Užduočių skaičius	5	17	22	28	31

benjaminai (5, 6 kl.), K – kadetai (7, 8 kl.), J – juniorai (9, 10 kl.), S – senjorai (11, 12 kl.) ir trumpa užduoties charakteristika.

Su grafų teorija susijusių užduočių skaičius didėja pagal amžiaus grupes (2 lentelė). Kasmet sudaromi nauji užduočių rinkiniai ir užduotys parenkamos nepriklausomai nuo ugdymo programos, o pagal užduoties įdomumą, unikalumą ir patrauklumą mokiniam. Galima teigti, jog su grafų teorija susijusios užduotys yra lengviau pavaizduojamos ir atitinka užduotims keliamus kriterijus – jos turi būti trumpos, išsprendžiamos per mažiau nei 3 minutes.

### Grafų uždavinių analizė

Išsamesnei analizei atrinktos penkios konkurso užduotys: „Salos ir tiltai“, „Susitikimas“, „Tiltai“, „Statom tiltus!“ ir „Bebrų rąstai“. Užduotis „Salos ir tiltai“ skirta grafo, kaip diskrečios struktūros realiems objektams atvaizduoti, sampratai įsisavinti. Užduotyse „Susitikimas“ ir „Tiltai“ ieškoma optimalaus kelio, naudojami skirtingi trumpiausio kelio paieškos algoritmai. Užduotyse „Statom tiltus!“ ir „Bebrų rąstai“ supažindinama su aprėpties medžio ir maksimalaus srauto paieškos algoritmais.

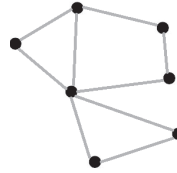
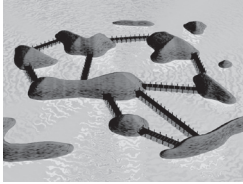
Užduotyje „Salos ir tiltai“ (1 pav., uždavinio idėją pasiūlė Lietuvos mokslininkai) vaizduojamos salos ir tiltai pasitelkus schemas – grafus. Pateikiamas tiek standartinis grafas (salas vaizduojant viršūnėmis, t. y. taškais, o tiltus – briaunomis), tiek neįprastas atvirkštinis vaizdavimas (tiltai – taškai, salos – linijos). Nors užduotyje neįvardijama, kad tai yra grafas, tačiau mokiniai spęsdami uždavinį turi gana tiksliai išivaizduoti, kaip vyksta vaizdavimas, kokie yra ryšiai, taigi mokiniai net nežinodami mintyse konstruoja ir nagrinėja grafus. Toliau siekiama, kad pasibaigus konkursui mokiniai aptartų užduotis kartu su mokytojais, kurie supažindintų su uždaviniuose esamais konceptais, padėtų giliau pažvelgti į uždavinių sprendimus.

Grafai – svarbi informatikos priemonė duomenims aprašyti ir objektų ryšiams nuskaidyti, pavyzdžiui, telekomunikacijų tinklams ar organizacijų struktūroms pavaizduoti. Grafo sudarymas ar atpažinimas turint realų objektą yra dažnas informatikos uždavinys.

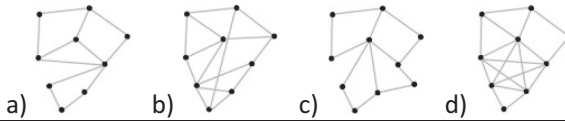
2014 metais vokiečių sukurta užduotis „Susitikimas“ (2 pav.) pristato juniorams ir senjorams svorinį grafa. Šioje užduotyje grafo briaunos turi svorius, kurie nurodo kelionės kainą. Mokinių prašoma surasti

## SALOS IR TILTAI

Bebių inžinieriai nutarė nutiesti tiltus tarp salų, kuriose gyvena jų bendruomenės. Statybos schema, kurioje salos vaizduojamos taškais, o tiltai – linijomis, atrodo taip:



Tačiau išdykę bebrukai perpašė brėžinį: taškais pavaizdavo tiltus, o linijomis – salas. Kuri schema jiems gavosi?



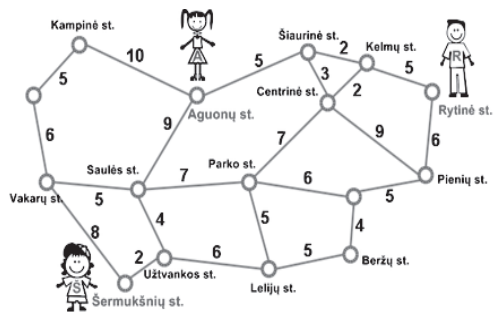
1 pav. Užduotis „Salos ir tiltai“

## SUSITIKIMAS

Mieste, kuriame gyvena Agnė, Rytis ir Šarlotė, yra patogus metro tinklas. Pateikta tinklo schema, kurioje pavaizduotos metro stotys ir jas jungiantys keliai. Skaičius ties linija rodo, kiek bebų (vietinė bebų valiuta) kainuoja nuvažiuoti tarp dviejų gretimų stotelių.

Agnė gyvena šalia Aguonų stotelės, Rytis – šalia Rytinės stotelės, Šarlotė – šalia Šermukšnių stotelės. Vaikai nori susitikti kurioje nors iš stotelių. Nė vienas iš jų negali išleisti daugiau nei 15 bebų, tačiau ir pėstute eiti nenori.

Kuriose stotelėse jie galėtų susitikti? Pažymėkite visas galimas susitikimo vietas.



2 pav. Interaktyvi užduotis „Susitikimas“

optimalią trijų draugų susitikimo vietą. Užduotis interaktyvi: tai reiškia, kad ją reikia spręsti reikalingus kelius (briaunas) pažymint pele.

Šiame uždavinyje norint rasti trumpiausią kelią naudojamas Dijkstros algoritmas. Ieškoma pigiausio kelio iš kiekvieno pradinio taško. Stotelės, į kurias iš visų trijų pradinųjų stotelių bus galima nuvykti išleidžiant ne daugiau kaip 15 bebų ir bus uždavinio sprendiniai. Dijkstros algoritmas nėra vienintelis, skirtas trumpiausiam keliui rasti.

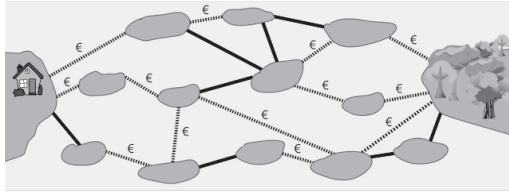
2014 metais kanadiečio pasiūlyta užduotis „Tiltai“ (3 pav.) taip pat prašo surasti op-

timalų kelią. Prašoma surasti kelią iš vienos viršūnės (Sandros namų) į kitą (mišką). Ap-siribojama tam tikru mokamų tiltų skaičiumi ir ieškoma pigiausio galimo kelio. Yra daug būdų išspręsti tokius uždavinius; vienas įdomiausių ir iššūkius keliančių informatikos aspektų – galimybė susidurti su gerai žinomų problemų variantais. Remdamiesi šių kelio paieškos užduočių pavyzdžiu, mokytojai galėtų supažindinti mokinius su trumpiausio kelio paieška grafe, paaiškinti optimalaus maršruto paieškos algoritmus.

Dažnas reiškiny „Bebro“ konkurse – užduotys, kurių istorijos susijusios su beb-

## TILTAI

Tarp salų ežere nutiesti tiltai. Kaip parodyta paveiksle, vieni tiltai yra viešieji (ištisinė linija), kiti yra mokami (brūkšninė linija). Sandra nori iš savo namų nukeliauti į miškingąją salą. Ji ieško kelio, kuriame būtų mažiausiai tiltų. Tačiau Sandra turi nedaug pinigų ir gali užmokėti ne daugiau kaip už du mokamus tiltus.



Kiek mažiausiai tiltų reikės Sandrai pereiti, jei mokamų tiltų gali būti ne daugiau kaip du?

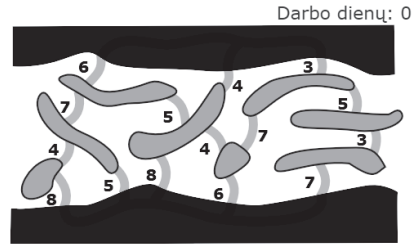
- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

3 pav. Užduotis „Tiltai“

## STATOM TILTUS!

Bebras turi sujungti salas tiltais taip, kad būtų įmanoma kaip nors patekti į kiekvieną salą, nesvarbu nuo kurio kranto, ir būtų galima pereiti iš vieno upės kranto į kitą. Dar nė vienas tiltas nėra pastatytas. Tose vietose, kur galima statyti tiltą, yra parašytas skaičius – kiek dienų truks to tilto statyba. Pelės spustelėjimu tiltas pastatomas arba pašalinamas.

Kiek mažiausiai dienų prireiks šiam darbui atlikti?



4 pav. Interaktyvi užduotis „Statom tiltus!“

rais, tiltų ar užtvankų statymu. Ne išimtis ir Šveicarijos mokslininkų pasiūlyta užduotis „Statom tiltus!“ (4 pav.). Ji buvo pateikta benjaminų ir senjorų amžiaus grupėms. Šioje užduotyje pateiktas salų ir galimų nutiesti tiltų žemėlapis, kuriame nurodyta, kiek dienų užtrunka kiekvieno tilto statyba. Užduoties tikslas – sujungti visas salas ir abu upės krantus tiltais taip, kad tiltų statybos užimtų trumpiausią laiką.

Ši užduotis skirta supažindinti su svoriniu grafu ir jį nagrinėti atliekant paiešką minimalios aprėpties (arba jungiamajame) medyje. Problema sprendžiama naudojantis Kruskalo algoritmu.

Sprendžiant užduotį minėtu algoritmu, pradedama neturint jokio tilto. Kiekviename žingsnyje statomas tas tiltas, kurio pastatymas užima mažiausią darbo dienų

skaičių. Tiltas nstatomas tik tuo atveju, jei jis jungtų jau sujungtas salas. Užduotis interaktyvi, tad mokiniams paspaudus ant tilto, kurį norima tiesti, atitinkamai didėja ekrane matomas darbo dienų skaičius.

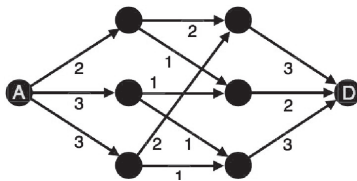
Senjorų grupės šveicarų sukurta užduotis „Bebrų rąstai“ (5 pav.) – šį kartą bebrai kanalais plukdo rąstus. Užduotyje duotas kanalų žemėlapis ir nurodyta, kiek daugiausia rąstų galima plukdyti kanalu per 1 minutę. Kanalai, kuriais bebrai plukdo rąstus, yra planaraus orientuoto grafo pavyzdys. Užduotyje prašoma rasti maksimalų skaičių rąstų, nuplukdomų į galutinį maršruto tašką per 1 min. Tai gana sudėtingas maksimalaus srauto tinkle paieškos uždavinys.

Didžiausio srauto orientuotame grafe paieška yra pagrindinis optimizavimo algoritmų konceptas. Optimizavimas – dažna



## BEBRŲ RAŠTAI

Bebrai plukdo rąstus kanalais pagal rodykles iš tvenkinio (A) į Debesnų pelkės ežerėlį (D). Kiek daugiausiai rąstų per minutę galima nuplukdyti kiekvienu kanalu, rodo ties juo parašytas skaičius. Kiek daugiausia rąstų gali būti nuplukdyta į Debesnų pelkės ežerėlį per vieną minutę?



a) 7 b) 8 c) 6 d) 5

5 pav. Užduotis „Bebraų rąstai“

problema. Galima taikyti godųjų algoritmą, kai kiekvienu žingsniu pasirenkamas geriausias sprendimas, tačiau godumo principas ne visuomet pasiteisina ar reikalauja pernelyg daug išteklių. Todėl ieškoma sudėtingesnių ir efektyvesnių algoritmų.

Sprendžiant šį uždavinį neužtenka pažiūrėti, kiek daugiausia rąstų būtų galima nuplukdyti paskutiniais kanalais (toku atveju būtų gautas klaidingas atsakymo variantas: 8, kurį pasirinko 59 proc. mokinių). Uždavinys reikalauja atidumo ir analizės. Svarbu nebūti „godžiam“ ir neskubėti – geriau viršutiniame kanale plukdyti tik vieną rąstą (nors būtų galima du) ir likusį plukdyti kanalu žemyn, kad du viduriniu kanalu plukdomi rąstai pasiektų galutinį tikslą. Tokius uždavinius nagrinėja maksimalaus srauto paieškos algoritmai, kuriuos siekiama pristatyti pateikiant šią bebrų istoriją.

### Statistikos analizė

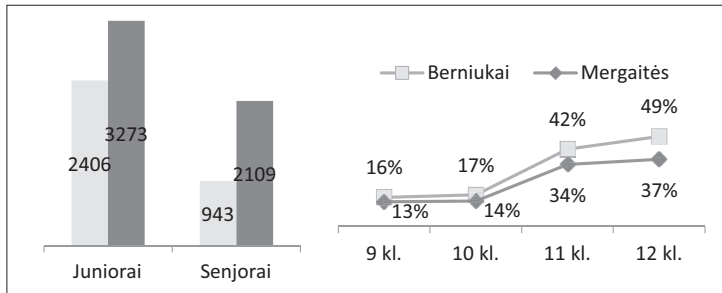
Kuriant ir tobulinant užduotis svarbu teisingai nustatyti, kuriai amžiaus grupei užduotis yra tinkama, koks jos sudėtingumas. Konkurso dalyviai skirstomi į amžiaus grupes: mažyliai (3, 4 kl.), benjaminai (5, 6 kl.), kadetai (7, 8 kl.), juniorai (9, 10 kl.), sen-

jorai (11, 12 kl.). Užduočių rinkinių lygiomis dalimis sudaro lengvos, vidutinės ir sunkios užduotys, vertinamos atitinkamai 6, 9 ir 12 taškų. Norint patikrinti, ar amžiaus grupė ir sudėtingumas buvo nustatyti teisingai, po konkurso atliekama statistikos analizė.

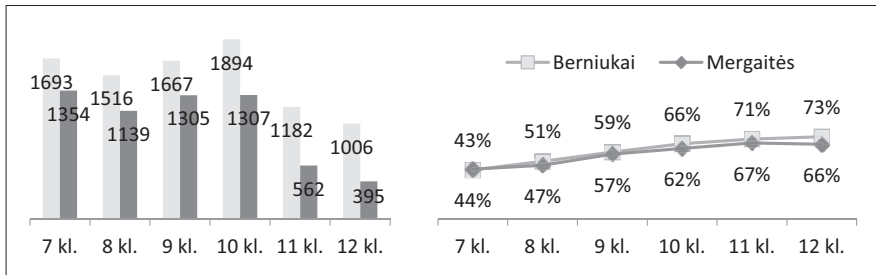
2014 metais užduotis „Susitikimas“ buvo pateikta juniorams ir senjorams. „Bebro“ bendruomenės mokslininkai užduotį įvertino kaip sunkią juniorams ir vidutinę senjorams. Iš tiesų, 9–10 klasių mokiniams šią užduotį išspręsti sekėsi daug sunkiau nei senjorams (6 pav.). Be to, vaikinai pademonstravo geresnius rezultatus, ypač išsiskiria merginų ir vaikinų rezultatai 11–12 klasėse. Tačiau būtent šios amžiaus grupės merginos daug rečiau ryžtasi dalyvauti „Bebro“ konkurse.

Grafų užduotį „Tiltai“ sprendė 7–12 klasių mokiniai. Kadetais ši užduotis buvo įvertina kaip sunki, juniorams – vidutinė, o senjorams – lengva. Teisingai užduotį išsprendusių mokinių dalis didėja kylant klase aukštynei (7 pav.). Berniukai šiek tiek lenkia mergaites visose klasėse.

2014 m. tik viena grafų užduotis buvo pateikta mažyliams – tai užduotis „Riešutai“. Dvi užduotys („Bebro draugai“ ir „Eismas mieste“) sprendė tik benjaminai, vieną („Grupinis darbas“) – tik juniorai.



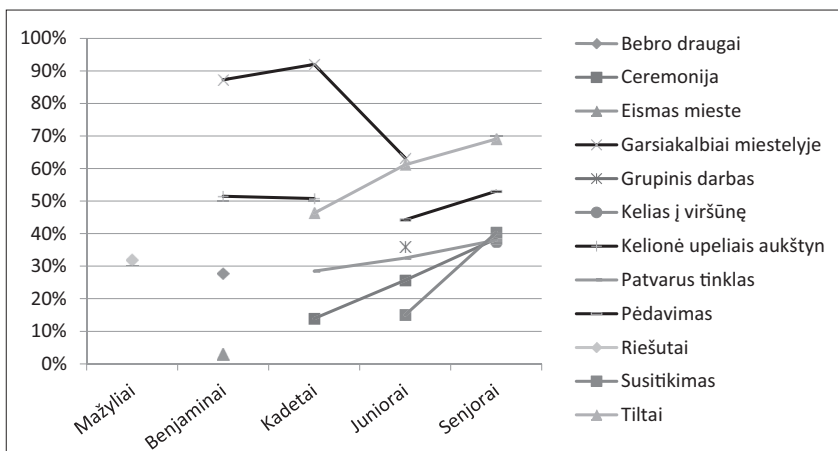
6 pav. Užduotį „Susitikimas“ teisingai išsprendusių mokinių pasiskirstymas pagal klasę ir lytį



7 pav. Užduotį „Tiltai“ teisingai išsprendusių mokinių dalis pagal klasę ir lytį

Kitos užduotys buvo skiriamos kelioms amžiaus grupėms. Pastebima tendencija, kad vyresni mokiniai geriau supranta užduotis ir demonstruoja geresnius rezultatus (8 pav.). Lengviausia mokiniams pasirodė interaktyvi

grafų užduotis „Garsiakalbiai miestelyje“, nors tik 63 proc. juniorų šią užduotį įveikė sėkmingai (nežinia, koks veiksnys turėjo įtakos tokiems rezultatams). Senjorams geriausiai sekėsi spręsti užduotį „Tiltai“.



8 pav. Teisingi atsakymai į 2014 m. pateiktas su grafų teorija susijusias užduotis pagal amžiaus grupę

## Išvados

2010–2014 metais informatikos ir informacinių technologijų konkurse „Bebras“ Lietuvoje naudota daugiau kaip 50 uždavinių, susijusių su grafais ir jų pagrindiniais algoritmais. Daugumos uždavinių tikslas yra supažindinti su grafo sąvoka: mokiniai turi atpažinti, kuris grafas vaizduoja realų objektą; iš duotų variantų atrinkti neįmanomą kelią. Dalis užduočių, skirtų vyresniųjų klasių mokiniams, supažindina su trumpiausiojo kelio, paieškos į gylį ar į

plotį algoritmais, didžiausio srauto paieškos ar keliaujančio pirklio problema.

Atlikus 2014 metais naudotų 12 užduočių, kurios susijusios su grafais, analizę paaiškėjo, kad, nepriklausomai nuo užduoties tematikos, rezultatai gerėja pagal amžių, t. y. vyresni mokiniai geriau sprendžia visas su grafais susijusias užduotis. Taip pat vaikinai sprendžia kur kas geriau nei merginos.

Poreikiui esant, šio tyrimo rezultatų pagrindu būtų galima suformuluoti pasiūlymus formaliojo ar formalųjį švietimą papildančio informatikos ugdymo programai.

## LITERATŪRA

BARR, V.; STEPHENSON, C. (2011). Bringing Computational Thinking to K-12: What is Involved and What is the Role of the Computer Science Education Community? *Inroads*, vol. 2(1).

COMPUTING AT SCHOOL (2012). *Computer Science: A curriculum for schools*. [Žiūrėta 2015 m. gegužės 13 d.]. Prieiga per internetą: <<http://www.computingschool.org.uk/data/uploads/Computing-Curric.pdf>>.

CSTA [interaktyvus]. [Žiūrėta 2015 m. gegužės 1 d.]. Prieiga per internetą: <<http://csta.acm.org/>>.

DAGIENĖ, V. (2006). Information technology contests – introduction to computer science in an attractive way. *Informatics in Education*, vol. 5, no. 1, p. 37–46.

DAGIENĖ, V. (2010). Pagrindinių informatikos konceptų ugdymas pasitelkiant varžybas. *Pedagogika*, nr. 98, p. 91–99.

DAGIENĖ, V.; FUTSCHEK, G. (2008). Bebras International Contest on Informatics and Computer Literacy: Criteria for Good Tasks. In R. T. Mittermeir, M. Syslo (eds.). *Informatics Education – Supporting Computational Thinking. Lect. Notes in Computer Science*, vol. 5090, Springer, p. 19–30.

The International Olympiad in Informatics Syllabus (2013). [Žiūrėta 2015 m. gegužės 17 d.]. Prieiga per internetą: <[http://www.ioinformatics.org/a\\_d\\_m/isc/iscdocuments/ioi-syllabus.pdf](http://www.ioinformatics.org/a_d_m/isc/iscdocuments/ioi-syllabus.pdf)>.

ISTE. [Žiūrėta 2015 m. gegužės 17 d.]. Prieiga per internetą: <<http://www.iste.org/>>.

Informacinių technologijų mokomojo dalyko praplėtimo/pagilino gairės, 2012. [Žiūrėta 2015 m. gegužės 1 d.]. Prieiga per internetą: <[http://www.esparama.lt/es\\_parama\\_pletra/failai/ESFproduktai/2012\\_Informaciniu\\_tehnologiju\\_mokomojo\\_dalyko\\_prapletimo\\_pagilino\\_gaires.pdf](http://www.esparama.lt/es_parama_pletra/failai/ESFproduktai/2012_Informaciniu_tehnologiju_mokomojo_dalyko_prapletimo_pagilino_gaires.pdf)>.

MALIAUKIENĖ, L.; ŠINKŪNAS, J. (2001). Grafai. *Jaunajam matematikui 1*. Vilnius: Danieliaus leidykla, p. 76–82.

STUPURIENĖ, G.; SUTKUTĖ, E. (2014). Kas slypi išmaniose technologijose: atrask dalyvaudamas konkurse „Bebras“. *Žvirblių takas*, nr. 2(114), p. 14–16.

Šeštadieninės informatikos olimpiadininkų mokyklos svetainė [interaktyvus]. [Žiūrėta 2015 m. gegužės 1 d.]. Prieiga per internetą: <<http://siom.lmio.lt/>>.

Tarptautinės informatikos olimpiados programa [interaktyvus]. [Žiūrėta 2015 m. gegužės 1 d.]. Prieiga per internetą: <<http://people.ksp.sk/~misof/ioi-syllabus/>>.

WING, J. (2011). *Research notebook: Computational thinking – What and why?* [interaktyvus]. [Žiūrėta 2015 m. gegužės 1 d.]. Prieiga per internetą: <<https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why/>>.

## ANALYSIS ON GRAPH-BASED TASKS IN INFORMATICS CONTESTS

**Valentina Dagiienė, Gabrielė Stupurienė, Elena Sutkutė**

### S u m m a r y

The main purpose of this paper is to analyse the solution of graph-based tasks from the 2010–2014 informatics contest “Bebras”. The graph theory is not a compulsory subject in the Lithuanian curricula, but it is very interesting in the daily life. A lot of graph-based tasks are in the international informatics contest, and they are appointed for pupils of all ages. The analysis shows that the tasks cover various topics

of graph theory: introduction to the graph concept, the shortest path problem, the binary tree, the depth-first search and breadth-first search, the travelling salesman problem and other algorithms. The most popular graph-based tasks are related to the path search. There are a lot of very attractive tasks in the “Bebras” contest, and this can be one of the non-formal ways to present the graph theory to pupils.

*Įteikta 2015 m. liepos 20 d.*