ŠVIETIMAS ŽINIŲ VISUOMENĖJE

Informacinės technologijos matematikai vizualizuoti ir tyrinėti

Valentina Dagienė

Matematikos ir informatikos instituto
skyriaus vadovė,
vyriausioji mokslo darbuotoja, matematikos daktarė

Institute of Mathematics and Informatics,
Head of Department, Chief Researcher, PhD
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
El. paštas: dagiene@ktl.mii.lt

Eglė Jasutienė

Matematikos ir informatikos instituto
jaunesnioji mokslo darbuotoja

Institute of Mathematics and Informatics,
Junior Researcher
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
El. paštas: egle.jasutiene@ktl.mii.lt

Straipsnyje aptariama matematikos mokymo naudojant informacines technologijas problematika. Kompiuteris suteikia besimokančiajam tyrinėjimo, modeliavimo, konstravimo erdvę – matematikos mokymosi mikropasaulius. Tam reikia parengti kompiuterinių priemonių, tinkančių matematikai mokytis konstruktyvistiniu metodu. Prieš keletą metų Lietuvos mokyklos aprūpintos lokalizuota mokomąja kompiuterine programa „Dinaminė geometrija" (originalus pavadinimas „Geometer's Sketchpad"). Straipsnyje nagrinėjama šios programos naudojimo matematikos pamokose problematika, programos savybės ir ypatumai, aptariami dinaminių brėžinių konstravimo ir programos galimybių išplėtimo būdai. Analizuojama dinaminių brėžinių komplekto pagrindinės mokyklos matematikos kursui mokyti rengimo problematika, pateikiamas dinaminio brėžinio konstravimo pavyzdys.

Informacinių ir komunikacinių technologijų (IKT) veikiamas keičiasi įvairių dalykų mokymas ir mokymasis mokyklose. Istorija, geografija naudoja interaktyvius žemėlapius, pažintinius filmus, gamtos mokslų pamokose modeliuojami reiškiniai ir procesai, atliekami eksperimentai, kuriuos anksčiau buvo galima pamatyti tik mokslinėse laboratorijose, nagrinėjami muzikos kūriniai, užmezgami bendradarbiavimo ryšiai su įvairių kultūrų šalimis ir šitaip sėkmingiau mokomasi kalbų. Kompiuteriai atvėrė daug galimybių mokyti ir mokytis kitaip. Bandoma išmatuoti, kuriuose dalykuose ir kuriais būdais IKT gerina mokymosi rezultatus – šalys atlieka įvairius tyrimus, stebi mokinių ir mokytojų darbą, analizuoja pasiekimus.

Pastaruoju metu daugiausia dėmesio sutelkta į IKT naudojimą pradiniame ugdyme, ypač pirmauja gerai techniškai aprūpintos šalys. Jaunesniojo amžiaus vaikams sukurta daugybė kompiuterinių mokomųjų programų, žaidimų, testavimo sistemų. Patrauklios istorijos, animaciniai pasakojimai, žaidybinio pobūdžio veikla traukia mokinius, mokytojus, tėvus. Pradiniam ugdymui galima rasti gana daug matematikai skirtų mokomųjų kompiuterinių programų – skaičiams ir geometrinėms figūroms atpažinti, aritmetikos veiksmams atlikti, figūrų plotams, tūriams skaičiuoti ir pan. Pastebima, kad gerėja mokinių matematinės orientacijos įgūdžiai ir matematinė vaizduotė (Bork ..., 1992). Kas toliau? Kaip IKT galėtų talkinti matematikos mokymui ir mokymuisi gerinti?

Jau porą dešimtmečių pasaulyje intensyviai naudojamos ir plėtojamos trys universalios programos, skirtos matematikos (daugiau geometrijos) pagrindams mokytis, tai „Autograph“[1], „Cabri“[2], „Geometer's Sketchpad“[3]. Kiekviena iš šių programų turi vienokių ar kitokių skirtumų, pranašumų ar trūkumų, tačiau iš esmės yra gana panašios.

Lietuvoje nepakankamai dėmesio skiriama matematikai mokyti naudojant IKT. Pirmąsias nedideles matematikos mokomąsias kompiuterių programas (treniruoklius) parengė mokytojai (Dešimtainės...,1995; Aritmetika, 1995). Vėliau atsirado dar keletas analogiškų, bet beveik tuo viskas ir baigėsi.

Vienas didesnių darbų taikant IKT matematikai mokyti nuveiktas 2001 metais, kai išanalizavus tuomet labiausiai naudojamas universalias matematikos mokymo kompiuterines programas buvo pasirinkta „Geometer's Sketchpad“ (The Geometer's..., 2007), lokalizuota, licencijomis aprūpintos visos bendrojo lavinimo mokyklos (lokalizuota programa pavadinta „Dinamine geometrija“).

Programos lokalizavimas, mokyklų aprūpinimas licencijomis – būtini pradiniai darbai. Tačiau to nepakanka. Toliau prasideda programos diegimas – ilga, daug triūso reikalaujanti veikla. Paprastai išskiriami du programų diegimo metodologiniai etapai: 1) mokytojų mokymas (t. y. kursai mokytojams, jų supažindinimas su programos galimybėmis), 2) mokymo metodinės medžiagos ir taikomųjų pavyzdžių parengimas. Analizuojant „Dinaminės geometrijos“ diegimą į ugdymą buvo surastas ir suformuotas papildomas metodologinis etapas – ne tik mokomi mokytojai, rengiama metodinė medžiaga, bet ir sistemingai peržiūrimos matematikos mokymo bendrosios programos (mokymosi turinys), atrenkamos tinkamos kompiuterizuoti temos ir joms, naudojantis „Dinaminės geometrijos“ priemonėmis, kuriami dinaminių brėžinių rinkiniai.

Straipsnio tikslas – ištirti dinaminių brėžinių konstravimo ypatumus naudojant „Dinaminės geometrijos“ programą, pateikti galimus sprendimo būdus, ištirti, kaip galima išplėsti programos galimybes veiksmingesniam darbui matematikos pamokose.

1. Mokytis matematikos – mokytis konstruoti matematikos žinias

Matematika – vienas sunkesnių dalykų mokykloje. Priežasčių daug, viena pagrindinių – formalizuota matematinė kalba, kuri logiška ir graži mokslininkui, tačiau sunkiai suvokiama vaikų. Mokslininkai, tyrinėjantys matematikos mokymo būdus, atkreipia dėmesį į tai, KAIP mokyklose dažniausia mokoma matematikos – paprastai perteikiamos matematikos žinios, informacija, aiškinama, pagrindžiama formaliais metodais, na dar parodoma – iš esmės mokinio veikla būna treniruojamojo pobūdžio, vyrauja bihevioristinis mokymo būdas (Schor, Koellner, 2003). Vienas pirmųjų matematikos

[1] Autograf: http://www.autograph-math.com/
[2] New Cabri 3D: http://www.cabri.com/
[3] The Geometer's Sketchpad: http://www.dynamicgeometry.com/

mokymo naudojant kompiuterius tyrinėjimo pradininkų Seymouras Papertas atkakliai siūlo konstruktyvistinį matematikos mokymo ir mokymosi metodą (Papert, 1995).

„Atsižvelgus į mokyklinį palikimą, galima matyti du matematikos mokymo kelius. Einant tradiciniu keliu, mokyklinė matematika priimama kaip aksioma ir beviltiškai bandoma ieškoti jos mokymo metodų. Kai kurie mokytojai tam naudoja kompiuterius. Paradoksas, tačiau mokymui naudojamas kompiuteris tampa priemone prievarta kišti nesuvirškinamą medžiagą <...> Pagrindinė pedagoginė problema mums yra ne kaip išmokyti esamos mokyklinės matematikos, o kaip pertvarkyti matematiką arba – bendriau – kaip pertvarkyti žinias, kad nereikėtų didelių pastangų jų išmokyti. “ (Papert, 1995, p. 77)

Kompiuteris gali suteikti mokiniui puikią tyrinėjimo, konstravimo erdvę – matematikos mokymosi mikropasaulius. Norint tai padaryti, pagrindinį dėmesį reikia skirti:

1) mokytojams rengti mokant naudotis konstruktyvistine metodika;
2) IKT priemonėms, tinkančioms matematikai mokytis konstruktyvistiniu metodu, kurti.

Abu išvardyti punktai svarbūs. Pirmajam įgyvendinti reikia daug laiko, nepakanka tam skirti dėmesį tik mokytojų kvalifikacijos tobulinimo kursuose – reikia iš esmės keisti mokymą pedagogus rengiančiose aukštosiose mokyklose, nesitenkinti tik geru teoriniu lygmeniu. Antrajam įgyvendinti būtina rengti konstruktyvistiniais metodais grįstas priemones ir išmokyti mokytojus jomis tinkamai naudotis.

Lietuvoje porą metų bandyta mokyti matematikos mokytojus rengiant jiems „Dinaminės geometrijos“ kursus, aiškinant, ką galima daryti su šia programa, kaip ruoštis pamokoms.

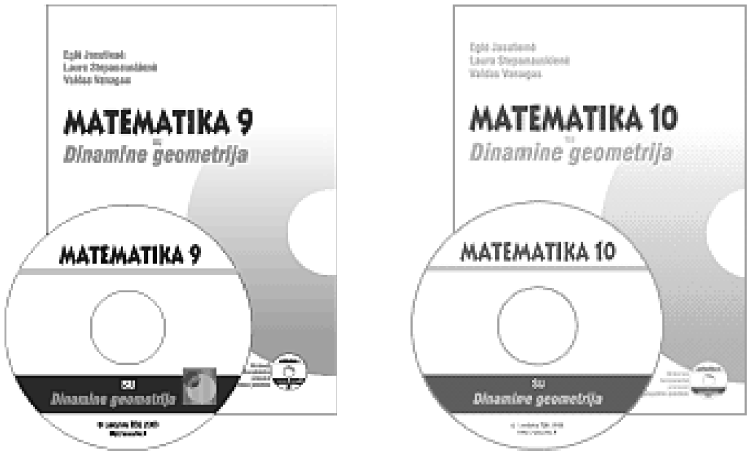
2003 metais Švietimo ir mokslo ministerijos užsakymu buvo atliktas kompiuterinių programų naudojimo mokyklose tyrimas (Mokomųjų..., 2003). Jis parodė, kad tik 27% matematikos mokytojų šiek tiek naudoja „Dinaminę geometriją“ – ir tik kai kada, retsykiais, dažniausia vieną kitą kartą parodydami keletą pavyzdžių pamokose.

Mokytojai nurodė reto naudojimosi „Dinamine geometrija“ priežastis – iš esmės buvo pabrėžiamas laiko ir kvalifikacijos stygius patiems savarankiškai pasirengti pamokoms naudojantis kompiuterine programa, pavyzdžiui, sukonstruoti dinaminius brėžinius. Nors mokytojams pateiktos metodinės rekomendacijos, kaip dirbti su šia programa, nors jie turi konkrečių pamokos pavyzdžių, tačiau kiekvienai matematikos temai ir kiekvienam mokymo (mokymosi) stiliui reikia vis kitokių brėžinių, o norint tai sukonstruoti reikia nemažai laiko.

Šitaip kilo idėja peržiūrėti matematikos mokymo bendrąsias programas, išanalizuoti atskiras temas, uždavinius ir sukurti kompiuterinę priemonę – mikropasaulį – matematikai mokyti (mokytis). Priemonė turi įgalinti dirbti konstruktyvistine metodika, be abejo, savaime jis negali tapti konstruktyvesniu mokymo būdu – tai priklauso nuo mokytojo darbo pobūdžio.

Priemonė pirmiausia skiriama dviem matematikos mokymo pusėms stiprinti – matematikos reiškinių vizualizavimui ir tyrinėjimui.

Vizualizavimas – puiki kompiuterio funkcija mokymui, ji buvo seniai pastebėta ir naudojama (Dixon, 1997). Sukurta nemažai įvairių kompiuterinių programų geometriniams kūnams vaizduoti, ypač plėtojamos erdvinės geometrijos galimybės – pastaroji labiau pravarti architektūrai ir inžinerijai. „Dinaminės geometrijos“ išskirtinė savybė – Euklido geometrijos ir algebros dinaminių brėžinių konstravimas turint tik pieštuką, liniuotę ir skriestuvą bei konstruojamų objektų ryšių hierarchiškumas.



1 pav. ***„Dinaminės geometrijos“ priemonių komplektas 9–10 klasių matematikos kursui***

Matematikos tyrinėjimas – vienas esminių konstruktyvistine pedagogika pagrįstų mokymosi būdų. Daug dėmesio ir priemonių matematikos pradmenims tyrinėti skiria Logo pedagogikos šalininkai (Papert, 1995). Kaip įsitikinome, „Dinaminė geometrija“ tam irgi gerai tinka (Stepanauskienė, 2001). „Dinaminės geometrijos“ brėžinių sukurtas komplektas gali tapti puikia priemone įvairioms matematikos temoms tyrinėti – šitaip stiprinamas konstruktyvistinis mokymosi būdas.

Buvo peržiūrėtos matematikos mokymo bendrosios programos ir išsilavinimo standartai (Bendrosios..., 2003). Matematikos bendrosios programos analizė parodė, kad „Dinaminę geometriją“ galima naudoti mokant arba mokantis apie 50% matematikos kurso bendrojo lavinimo mokykloje (Stepanauskienė, 2001). Be to, „Dinaminė geometrija“ padeda įgyvendinti tikslus, uždavinius ir didaktines nuostatas, aprašomas bendrosiose programose ir išsilavinimo standartuose (Dagienė, Jasutienė, 2004).

Atrinktos temos, kurioms itin tinka naudoti „Dinaminę geometriją“, ir pradėta rengti priemonių komplektą. Aptarus priežastis pirmiausia pasirinkta pagrindinė mokykla – parengta mokomoji kompiuterinė priemonė 9 klasės matematikos kursui (Jasutienė ir kt., 2003), po poros metų – 10 klasės matematikos kursui (Jasutienė ir kt., 2005). Priemonės išleistos dviem atskiromis kompaktinėmis plokštelėmis su vartotojo instrukcija ir trumpomis metodinėmis rekomendacijomis (1 pav.), jomis aprūpintos visos bendrojo lavinimo mokyklos.

Parengtas 9–10 klasių priemonių komplektas „Dinaminei geometrijai“ naudoti matematikos pamokose apima per 900 dinaminių brėžinių (Jasutienė ir kt., 2003, 2005). Kuriant dinaminius brėžinius buvo pastebėti ir ištirti brėžinių kūrimo naudojant „Dinaminę geometriją“ ypatumai.

2. „Dinaminės geometrijos“ ypatumai

Dauguma kompiuterinių programų, pavyzdžiui, „Crocodile Mathematics“, „Autograph“, matematikos brėžiniams konstruoti siūlo galimybę pasirinkti geometrines figūras, ir jos iš karto pateikiamos kompiuterio ekrane – galima tiesiogiai atlikti matavimus, transformacijas (Šolytė, 2004). „Dinaminės geometrijos“ išskirtinumas tas, kad geometrinė figūra turi būti konstruojama naudojantis minimaliomis priemonėmis – pieštuku, liniuote, skriestuvu. Suprantama, tuomet norint nubraižyti kurią nors geometrinę figūrą reikia žinoti jos savybes ir būdą, kaip sukonstruoti figūrą.

Nubraižyti taisyklingą geometrinę figūrą naudojantis „Dinamine geometrija“ nėra sudėtinga, tačiau nubraižyti taip, kad keičiant figūrą jos savybės išliktų nepakitusios, reikia nemažai matematikos žinių ir būti gerai įvaldžius programą. Šis „Dinaminės geometrijos“ ypatumas gali būti laikomas ir pranašumu (reikia žinoti konstruojamo objekto savybes, perprasti jo dalių sąryšius), ir trūkumu (reikia gebėti naudotis programa, apgalvoti dinaminio brėžinio algoritmą ir pagal jį sukonstruoti brėžinį). Taigi norint sukonstruoti net ir nesudėtingą brėžinį, reikia matematinių žinių ir įgūdžių, taip pat mokėti dirbti kompiuterine programa, – suprantama, visam tam reikia laiko.

Šią problemą galima iš dalies išspręsti atitinkamai paruošiant darbui „Dinaminę geometriją“, t. y. iš anksto sukuriant savo (naudotojo) priemones (pvz., sukonstruoti taisyklingas geometrines figūras ir jas įrašyti). Tai pakanka atlikti tik vieną kartą. Vėliau bet kuriame brėžinyje pasirinkus priemonę ir brėžinių lape spragtelėjus keletą kartų, bus nubraižoma pasirinktoji figūra. Taip sukuriama aplinka (mikropasaulis), kuria nesunku naudotis visiems. Todėl šiuo požiūriu „Dinaminės geometrijos“ galimybės geometriniams brėžiniams konstruoti yra gerokai didesnės nei kitų programų.

Vienas esminių „Dinaminės geometrijos“ trūkumų tas, kad nėra trimačio vaizdavimo priemonių. Vis dėlto šiek tiek padirbėjus trimates figūras (gretasienius, sukinius ir kt.) ir jų pjūvius galima pavaizduoti pasinaudojus esamomis priemonėmis bei komandomis – galima gauti erdvinį dinaminės figūros vaizdą.

Kuriant dinaminių brėžinių komplektą pagrindinės mokyklos matematikos kursui buvo susidurta su dar vienu „Dinaminės geometrijos“ trūkumu: programa neturi galimybės vaizduoti parametrinių nelygybių, lygčių, jų sistemų sprendinių. Šis trūkumas buvo įveiktas pasinaudojus standartinėmis funkcijomis, esančiomis programoje (būtent, *sin*, *cos*, *tg*, *arccos*, *arcsin*, *arctg*, *abs*, *sqrt*, *ln*, *log*, *sgn*, *round*, *trunc*). Išsamiau šis konstravimo būdas aptariamas tolesniame skyriuje.

Dar viena „Dinaminės geometrijos“ ypatybė yra ta, kad geometrinių objektų konstravimas pagrįstas hierarchija. Pavyzdžiui, atkarpa, spindulys, tiesė, apskritimas konstruojami turint du taškus (taškai vadinami „tėvais“, o gautas objektas „vaiku“ ir t. t.). Todėl tempiant „tėvą“ – tašką, keičiamas ir „vaikas“ – atkarpa ar kt. Jei sukonstruojamas atkarpos vidurio statmuo, tai keičiant atkarpą, keičiamas ir vidurio statmuo. Pašalinus tašką – „tėvą“, pašalinami ir visi jo objektai – „vaikai“. Dėl šių ryšių galima sukonstruoti brėžinius, kuriuos dinamiškai keičiant jų pagrindinės savybės išlieka tos pačios.

„Dinaminės geometrijos“ galimybės leidžia sukurti dinaminį vaizdą, kuriame būtų ir dinaminis geometrinis brėžinys, ir paaiškinimai, ir sprendiniai, ir navigacijos mygtukai, ir dar kitokių patogių darbui priemonių. Iš tikrųjų – tai mokymo(-si) aplinka, kurioje programuojant objektus galima sukurti priemonę bet kuriai matematikos ir net kai kurioms fizikos temoms mokytis.

Taigi „Dinaminėje geometrijoje“ nėra konkrečių komandų, kurias surašius sukonstruojamas brėžinys. Dinaminiai vaizdai konstruojami naudojant geometrinius, algebrinius bei grafinius objektus ir aplinkos priemones. Todėl „Dinaminę geometriją“ galima vadinti geometrinio programavimo aplinka (Jackiw, Finzer, 1993).

3. Dinaminių brėžinių konstravimas

Sukonstruoti dinaminiai brėžiniai papildo matematikos mokymą, paskatina mokytojus dirbti taikant konstruktyvistinius metodus, patrauklius mokiniams: pagreitina žinių įsisavinimą; pagerina mokinių aktyvumą mokymosi procese; kelia mokymosi motyvaciją; padeda mokiniams ugdyti pasitikėjimą savimi; lavinamas loginis mąstymas; mokiniai aktyviai bendradarbiauja su mokytoju (Jasutienė, Stepanauskienė, 2006). Be to, pastebimi ir kiti dinaminių brėžinių pranašumai: nereikia daugelį kartų braižyti popieriuje ar lentoje tų pačių brėžinių – mokymo(-si) laikas skiriamas žinioms gilinti; ištiriama visa brėžinių grupė – matomas visuminis vaizdas; tempiant objektus ir keičiant parametrus matomas brėžinio kitimas – tiriant įsitikinama įvairių savybių egzistavimu; konstruojant dinaminius brėžinius lavinami matematiniai gebėjimai ir įgūdžiai bei algoritminis mąstymas, gilinamos matematinės žinios (Hoyles, Jones, 1998; Dixon, 1997).

Kai imamasi konstruoti dinaminį brėžinį, reikia numatyti, kuriai temai jis skirtas ir kuriuos gebėjimus turėtų lavinti. Kiekvienas konstruojamas dinaminis brėžinys turi savo paskirtį: ištirti objekto savybes, vizualizuoti įrodymą, pagrįsti teoremą, pavaizduoti uždavinio sprendimą ir pan. Nuo dinamiško vaizdo (brėžinio) paskirties priklauso ir jo konstravimo būdas.

Brėžinių konstravimo būdus naudojantis „Dinamine geometrija“ galima suskirstyti į keturias grupes pagal jų konstravimo sudėtingumą: 1) tiesioginis konstravimas, kai naudojamos programoje esančios geometrinės priemonės ir komandos (pvz., atkarpa, apskritimas, trikampis, keturkampis, funkcijos grafikas); 2) konstravimas, pagrįstas tiesioginiu geometriniu programavimu – kai pagal iš anksto apgalvotą algoritmą konstruojamas brėžinys naudojantis tiesioginėmis programos priemonėmis ir atsižvelgiant į konstruojamų objektų ryšių hierarchiškumą (pvz., atkarpos dalijimas į keletą lygių dalių, taisyklingos geometrinės figūros, sukiniai); 3) konstravimas, pagrįstas sudėtingesniu geometriniu programavimu – kai pagal iš anksto apgalvotą algoritmą naudojantis programos priemonėmis ir sudėtingesniais algebriniais skaičiavimais kuriama mokymo(-si) terpė (pvz., grįžtamojo ryšio pateikimas užrašant nelygybės sprendinius arba geometriškai pavaizduojant) ir 4) naudotojo priemonių kūrimas iš visais trim būdais konstruojamų brėžinių. Aptarsime kiekvieną iš būdų.

3.1. Tiesioginis konstravimas

Tiesioginis konstravimas yra paprasčiausias dinaminių brėžinių konstravimo būdas. Tam nereikia ypatingų matematinių žinių ar sudėtingesnio programos valdymo – naudojamasi tiesioginėmis programos priemonėmis. Pasirenkama priemonė (pvz., atkarpa) ir brėžinių lape nubrėžiamas objektas. Nubrėžus objektą galima atlikti matavimus ir transformacijas, užrašyti tekstą, braižyti funkcijų grafikus.

3.2. Konstravimas, pagrįstas tiesioginiu geometriniu programavimu

Kiek sudėtingesnis yra tiesioginis geometrinis programavimas. Tam būtina iš anksto apgalvoti norimos konstrukcijos algoritmą: kaip nubraižyti dinaminį geometrinį objektą su tam tikromis savybėmis, naudojantis tik skriestuvu, liniuote ir keliomis programos komandomis. Norint sukonstruoti tokį objektą, reikia žinoti ne tik objekto savybes ir kaip jas sukonstruoti, bet ir suprasti dinaminių objektų braižymo principus, atkreipti dėmesį į dinamiškas savybes, ryšius tarp objekto dalių ir pan., t. y. kad keičiant objektą, jo savybės išliktų nepakitusios.

Pavyzdžiui, norint sukonstruoti lygiašonį trikampį, kurio kraštinių ilgius ir kampų dydžius galima keisti, reikia remtis lygiašonio trikampio savybėmis – kampai prie pagrindo yra lygūs, dvi kraštinės yra lygios – ir numatyti, kad šios savybės bus tenkinamos tada, kai trečioji trikampio viršūnė bus pradinės atkarpos (trikampio kraštinės) vidurio statmenyje (arba dviejų vienodo spindulio apskritimų, kurių centrai yra atitinkami pradinės atkarpos galai, sankirtoje). Naudojantis „Dinamine geometrija" lygiašonio trikampio dinaminis brėžinys gali būti sukonstruojamas šešiais žingsniais, kai pradiniai duomenys yra du taškai – trikampio viršūnės. Žingsnių skaičius priklauso nuo naudotojo pasirinkto algoritmo. Taikant elementarius geometrinio konstravimo žingsnius gali būti nubraižyti visi taisyklingieji n-kampiai, gretasieniai ir kiti dinaminiai geometriniai objektai. Geometrinių figūrų konstravimo žingsnių skaičiaus „Dinaminė geometrija" neriboja.

3.3. Konstravimas, pagrįstas sudėtingesniu geometriniu programavimu

Sudėtingesnio geometrinio programavimo būdu dinaminiai brėžiniai konstruojami pagal iš anksto apgalvotą algoritmą naudojantis visomis programos priemonėmis: ir tiesioginėmis, ir sudėtingesniais algebriniais skaičiavimais. Sudėtingumas slypi būsimo brėžinio algoritme – jame naudojami algebriniai skaičiavimai.

Šitaip dažniausia kuriama mokymo(-si) terpė su grįžtamuoju ryšiu. Pavyzdžiui, vienas iš atvejų, kai prireikia tokių konstrukcijų, yra parametrinių laipsninių nelygybių, lygčių ar nelygybių sprendimas, jų sistemų sprendinių vaizdavimas ir jų tekstinis užrašymas. Čia reikia turėti omeny, kad sprendiniai keičiasi keičiant lygčių ar nelygybių parametrus.

Norint geometriškai pavaizduoti ir tekstu užrašyti tokių uždavinių sprendinius, reikia atlikti šiuos žingsnius:

1) numatyti visus įmanomus uždavinio sprendinių variantus, kai keičiami parametrai;
2) kiekvienam sprendinio variantui parašyti algebrinį reiškinį, kuris lygus 1, kai tam tikri parametrai tenkina atitinkamas sąlygas, o visais kitais atvejais lygus 0;
3) sukonstruoti pradinius objektus;
4) atlikti pradinių objektų postūmius tam tikru atstumu, padaugintu iš atitinkamo aprašytojo algebrinio reiškinio;
5) sukonstruoti arba užrašyti sprendinius vaizduojančius objektus (atkarpą, spindulį, tiesę, sakinį).

Žingsniai 3–5 konstruojami geometriškai, naudojantis tiesioginėmis programos priemonėmis.

Sudėtingiausia numatyti visus galimus parametrinio uždavinio sprendinius, priklausančius nuo parametrų, ir parašyti juos atitinkančius algebrinius reiškinius. Pavyzdžiui, norėdami išskirti atvejį, kai parametras a < 0, turėtume aprašyti taip: `sgn(abs(sgn(a)-1))·` `· abs(sgn(a))`. Šio reiškinio reikšmė lygi 1, kai a < 0, o kai a ≥ 0, reiškinio reikšmė yra 0.

Šis būdas išplečia „Dinaminės geometrijos" galimybes. Išmokus algoritmavimo pagrindų galima sukonstruoti interaktyvias mokymosi terpes įvairioms matematikos temoms.

3.4. Naudotojo priemonės kūrimas

Bet kuriuo būdu sukurtą dinaminį brėžinį galima aprašyti kaip naudotojo priemonę. Naudoto priemonės kūrimas yra pagrįstas brėžinio scenarijumi. Iš esmės, tai brėžinio konstravimo algoritmo aprašymas. Tik jį aprašo pati programa, o ne naudotojas.

Naujas scenarijus – pagal jau sukonstruo-

Duota:

1. taškas A

2. taškas B

Žingsniai:

1. Tegul $\overline{\mathbf{AB}}$ = atkarpa jungianti taškus (A ir B).

2. Tegul **C** = yra objekto ($\overline{AB}$ (paslėptas)) vidurio taškas.

3. Tegul **j** = tiesė statmena objektui ($\overline{AB}$) ir eina per tašką (C (paslėptas)).

4. Tegul **D** = taškas ant objekto (statmuo j).

5. Tegul $\overline{\mathbf{AD}}$ = atkarpa jungianti taškus (A ir D).

6. Tegul $\overline{\mathbf{DB}}$ = atkarpa jungianti taškus (D ir B).

2 pav. ***Lygiašonio trikampio konstravimo scenarijus***

tą brėžinį: iš pradžių sukuriama norima konstrukcija, o pagal ją kuriamas tos konstrukcijos gavimo scenarijus. Būtina sąlyga, kad pažymėti konstrukcijos objektai būtų hierarchiškai susieti.

Norint sukurti scenarijų (naudotojo priemonę) reikia: 1) sukurti konstrukciją – pavyzdį naujam scenarijui (ši konstrukcija ir bus kuriama naująja priemone); 2) pažymėti konstrukcijos pradinius objektus (dažniausiai tai nepriklausomi taškai) ir priemone norimą gauti galutinę konstrukciją; jei, be pradinių objektų ir galutinės konstrukcijos dar yra objektų, siejančių pradinius duomenis ir rezultatus, jų žymėti nebūtina (jei šie objektai pažymimi, tai jie bus matomi ir sukonstravus brėžinį su sukurtąja priemone); 3) sukurti priemonę pasirinkus scenarijaus kūrimo komandą.

Atlikus šiuos veiksmus, sukurta priemonė (scenarijus) įraukiama į priemonių (scenarijų) meniu ir tada ją galima naudoti tame pačiame arba naujame brėžinyje.

„Dinaminė geometrija“ leidžia peržiūrėti sukurtą scenarijų pasirinkus tam tikrą komandą (2 pav.). Scenarijaus peržiūrėjimo gali reikėti, kai norima rankiniu būdu pakartoti visą konstravimo kelią ar kartojant konstravimo žingsnius pakeisti vieną ar kitą objektą. Peržiūrint scenarijus galima mokytis konstruoti ir paprastesnius, ir sudėtingesnius dinaminius brėžinius.

3.5. Sudėtingesnio dinaminio brėžinio konstravimo pavyzdys

Parodysime, kaip pagrindinės mokyklos kurso brėžinių komplekte buvo pavaizduoti parametrinės kvadratinės nelygybės $ax^2 + bx + c \leq 0$, kai $a \neq 0$, sprendiniai. Šio vaizdavimo pagrindinė problema yra ta, kad „Dinaminė geometrija“ neturi tokios komandos, kuri skaičių tiesėje pavaizduotų nelygybės sprendinius, taip pat nėra priemonių sprendinių intervalams užrašyti tekstiniu būdu. Todėl norint sprendinius pavaizduoti taip, kad keičiant nelygybės parametrus, keistųsi ir geometriškai pavaizduoti (ar užrašyti) sprendiniai, reikia papildyti programą naujomis galimybėmis.

Sprendinius vaizduosime skaičių tiesėje atkarpa, spinduliu arba tiese – nelygu, kokie yra sprendinių intervalai. Pirmiausia brėžinių lape apibrėžiama koordinačių sistema, užrašomi parametrai a, b ir c, nelygybė, funkcija f(x) = ax2 + bx + c bei nubraižomas jos grafikas. Nelygybės sprendiniai priklauso nuo parametro a, lygties ax2 + bx + c = 0 diskriminanto D reikšmės bei lygties sprendinių x_1 ir x_2. Apskaičiuojamas diskriminantas ir lygties sprendiniai. Lygties sprendiniai atidedami abscisių ašyje.

Parametrinės nelygybės sprendiniai yra 1) $x \in [x_1; x_2]$, kai a > 0, D > 0; 2) $x_1 = x_2 = (-b)/(2a)$, kai a > 0, D = 0; 3) sprendinių nėra, kai a > 0, D < 0; 4) $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$, kai a < 0, D > 0; 5) $x \in (-\infty; +\infty)$, kai a < 0, D = 0 ir 6) $x \in (-\infty; +\infty)$, kai a < 0, D < 0. Kadangi 5 ir 6 atveju nelygybės sprendinių aibės sutampa, tai tuos du atvejus galima sujungti. Antrojo atvejo geometriškai vaizduoti nereikia, nes šis nelygybės sprendinys pasirodys, kai atidėsime koordinačių sistemoje lygties sprendinius – jie sutaps abscisių ašyje. Trečiojo atvejo geometriškai taip pat nereikia vaizduoti, bet reikia, kad pasirodytų pranešimas, jog šiuo atveju nelygybė sprendinių neturi. Taigi turime keturis nelygybės sprendinių vaizdavimo atvejus. Kiekvienam jų sudaromi algebriniai reiškiniai:

1) `sgn(abs(sgn(a)+1)·abs(sgn(D) +1))· ·abs(sgn(D))`. Reiškinys lygus 1, kai a > 0 ir D > 0, o visais kitais atvejais lygus 0.

2) `sgn(abs(sgn(a)-1)· abs(sgn(D)+1))`. Reiškinys lygus 0, kai a > 0 ir D < 0, o kitais atvejais lygus 1.

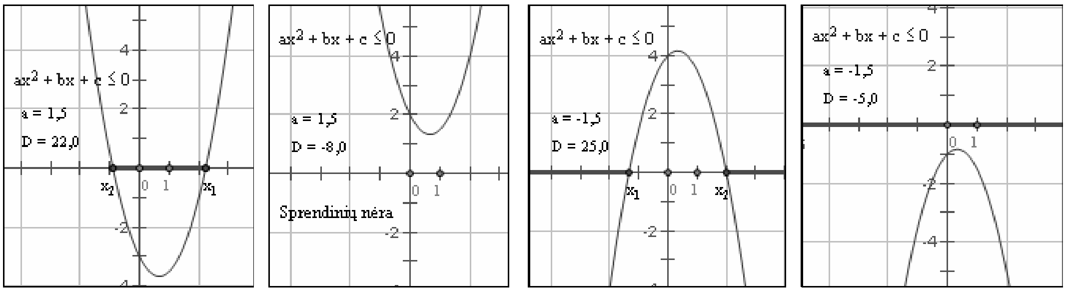
3) `sgn(abs(sgn(a)-1)·abs(sgn(D)+1))· ·abs(sgn(D))`. Reiškinys lygus 1, kai a < 0 ir D > 0, o kitais atvejais lygus 0.

4) `sgn(abs(sgn(a)-1)·abs(sgn(D)-1))`. Reiškinys lygus 1, kai a < 0 ir D ≤ 0, o kitais atvejais lygus 0.

Kiekvienas atvejis vaizduojamas atskirai. Kai a > 0 ir D > 0, tai sprendinių aibė yra tarp x_1 ir x_2. Ją pavaizduosime atkarpa, jungiančia šiuos du taškus skaičių tiesėje. Tam atliksime taško x_1 postūmį atstumu x_1x_2, kryptis priklauso nuo to, kuris iš lygties sprendinių yra didesnis. Tai nuspręsti padeda vėlgi ženklo funkcija: `sgn(x1-x2) = 1;0;-1` (1, kai $x_1 > x_2$, –1, kai $x_1 < x_2$ ir 0, kai $x_1 = x_2$). Vadinasi, postūmis atliekamas horizontaliai atstumu `sgn(abs(sgn(a)+1) · abs(sgn(D)+1)) · ·abs(sgn(D)) · sgn(x1-x2) ·| x1x2|`. Sujungiame pastumtą tašką su jo pirmavaizdžių atkarpa ir ją paryškiname. Dabar ši atkarpa skaičių tiesėje pasirodys tada, kai a > 0 ir D > 0 (3 pav. a).

Kai a > 0 ir D < 0, turi pasirodyti pranešimas „Nelygybė sprendinių neturi“. Tam užrašomas tekstas. Brėžinių lape atidedamas taškas toje vietoje, kurioje norima matyti pranešimą. Belieka sukurti neapibrėžtumo reiškinį, kai netenkinamos sąlygos a > 0 ir D < 0, kad pranešimas būtų nematomas. Tam, kai a < 0, naudosime `sqrt(a)`, o kai D ≥ 0, naudosime `sqrt(-D)/D`. Atliekamas atidėto taško horizontalusis postūmis atstumu `sgn(abs(sgn(a)-1)+ abs(sgn(D)+1)) · · sqrt(a) · sqrt(-D) · 1cm`. Kai reiškinio reikšmė lygi 0, tai pranešimas matomas, o kai lygi 1 – pranešimas dingsta (3 pav. b). Analogiškai galima užrašyti ir kitų nelygybės sprendinių aibes intervalais. Tada pirmavaizdis ir pastumtasis taškas paslepiami.

Kai a < 0 ir D > 0, nelygybės sprendiniai vaizduojami spinduliais. Jų vaizdavimas priklauso nuo lygties sprendinių x_1 ir x_2. Taigi vėl naudosime sprendinių palyginimo reiškinį: `sgn(x1-x2) = 1;0;-1` (1, kai $x_1 > x_2$, –1, kai $x_1 < x_2$ ir 0, kai $x_1 = x_2$). Atliksime taško x_1 postūmį atstumu `sgn(abs(sgn(a)-1)· ·abs(sgn(D)+1))·abs(sgn(D))·sgn(x1-x2)· · 1cm` ir sukonstruosime spindulį, einantį per pirmavaizdį ir pastumtą tašką. Analogiškai atliekamas taško x_2 postūmis atstumu



a) b) c) d)

3 pav. ***Kvadratinės nelygybės sprendinių vaizdavimas:***
a) a > 0, D > 0; b) a > 0, D < 0; c) a < 0, D > 0; d) a < 0, D ≤ 0

$\mathtt{sgn(abs(sgn(a)-1)\cdot abs(sgn(D)+1))}\cdot$ $\cdot\,\mathtt{abs(sgn(D))\cdot(-sgn(x_1-x_2))\cdot 1cm}$ ir sukuriamas spindulys (3 pav. c). Pastumtasis taškas paslepiamas.

Paskutiniuoju atveju, kai a < 0 ir D ≤ 0, sprendiniai pavaizduojami tiese. Tam koordinačių pradžios taškas pastumiamas atstumu $\mathtt{sgn(abs(sgn(a)-1)\cdot abs(sgn(D)-1))}\cdot$ $\cdot\,\mathtt{1cm}$. Per pirmavaizdį ir pastumtą tašką sukonstruojama tiesė (3 pav. d). Pastumtasis taškas paslepiamas.

Sukonstruotas dinaminis brėžinys vaizduoja parametrinės kvadratinės nelygybės $ax^2+bx+c \le 0$, kai $a \neq 0$ sprendinius. Šiam brėžiniui sukurti „Dinaminėje geometrijoje“ naudojamas 30 žingsnių algoritmas.

4. Pagrindinės mokyklos matematikos kurso dinaminių brėžinių komplektas

Dinaminiai brėžiniai 9–10 klasių matematikos temoms mokytis buvo kuriami dėl kelių priežasčių: pirmiausia, norėta sukurti produktą, kuris padėtų mokiniams pasiruošti bendrųjų žinių patikrinimui baigiant pagrindinę mokyklą (dešimtoje klasėje); antra, daugumą 9–10 klasės matematikos temų buvo galima vizualizuoti prasmingais dinaminiais brėžiniais ir trečia, devintoje klasėje pradedamas, o dešimtoje tęsiamas funkcijų mokymas – dinaminiai brėžiniai padeda geriau suvokti funkcijos apibrėžimą ir funkcijų savybes, perprasti jų transformacijas ir taikomumą (Dagienė, Jasutienė, 2006).

Atsižvelgiant į šias priežastis ir išsamiai išanalizavus programos galimybių išplėtimą buvos pasirinktos tos matematikos temos, kurias galima vizualizuoti „Dinamine geometrija“ nepažeidžiant įprastų matematinių žymėjimų ir žinių. Komplekte pateikiami dviejų tipų dinaminiai brėžiniai: 1) vizualizuojantys matematikos teoriją ir 2) vizualizuojantys spręstinus uždavinius (žr. lentelę).

Teoriją vizualizuojantys dinaminiai brėžiniai buvo kuriami taip, kad mokytojas turėtų galimybę pasirinkti, ar naudoti visą temos brėžinių grupę (pvz., kiekvienas brėžinys skirtas tirti funkcijos grafiko kitimui keičiant po vieną kvadratinės funkcijos parametrą), ar bendriausią dinaminį brėžinį (pvz., brėžinyje funkcijos grafikas tiriamas keičiant visus tris kvadratinės funkcijos parametrus). Uždavinius vizualizuojantys dinaminiai brėžiniai turi keletą savybių: 1) vienas dinaminis brėžinys apima visą uždavinių grupę ir 2) dažnai išplečia uždavinio sąlygą, pritaiko ją bendresniems atvejams (Dagienė, Jasutienė, 2006).

Lentelė. ***Dinaminių brėžinių skaičiai pagal temas***

9 klasė		10 klasė	
Tema	***Dinaminių brėžinių skaičius***	***Tema***	***Dinaminių brėžinių skaičius***
Tiesinė funkcija	146	Funkcijų grafikai	95
Kvadratinė funkcija	90	Lygčių ir nelygybių sistemos	23
Tiesinių lygčių sistemos	21	Kvadratinės nelygybės	39
Trikampių panašumas	78	Smailiojo kampo trigonometrinės funkcijos	83
Kvadratinių lygčių sprendimas	19	Trikampių sprendimas	74
Apskritimas, skritulys	116		
Uždaviniai	102	Uždaviniai	68

Kuriant priemonę daugiausia dėmesio buvo skiriama priemonės naudojimo patogumui – kad mokytojas kuo mažiau sugaištų laiko pritaikydamas brėžinius savo pamokoms (Jasutienė, Stepanauskienė, 2006). Pažymėtina, kad naudojant priemonę galima mokyti (mokytis) įvairiais metodais: tiek demonstruojant, tiek dirbant individualiai ar grupelėmis. Ypač pabrėžiamas matematikos mokymas taikant konstruktyvistinį mokymo metodą.

Išvados

Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos aprūpintos lokalizuota mokomąja kompiuterine priemone „Dinaminė geometrija“ (originalus pavadinimas „Geometer's Sketchpad“) – tai pasaulyje žinoma ir daugelyje mokymo įstaigų naudojama matematikos mokomoji programa. Lietuvoje buvo analizuojamos šios programos galimybės matematikos pagrindams mokyti.

Nustatyta, kad „Dinaminės geometrijos“ programa gerai tinka matematikos reiškiniams vizualizuoti ir tyrinėti. Tačiau kuriant dinaminius brėžinius susiduriama su keliomis problemomis: 1) programa nepateikia sukonstruotų taisyklingų geometrinių figūrų (daugiakampių), 2) programa neturi standartinių priemonių trimatės erdvės figūroms kurti, 3) programa neturi priemonių parametrinių lygčių, nelygybių, jų sistemų sprendiniams vaizduoti ir užrašyti tekstiniu pavidalu.

Šioms problemos spręsti buvo pasiūlytos papildomos „Dinaminės geometrijos“ priemonės ir metodikos. Dinaminėms erdvinėms figūroms ir jų pjūviams vaizduoti siūloma naudoti programos aplinkoje esamas priemones ir komandas. Naudojant standartines programos funkcijas galima pavaizduoti bet kurį sprendinių variantų skaičių, užrašyti juos tekstiniu pavidalu. Programoje esanti naudotojo priemonių kūrimo galimybė leidžia vieną kartą sukonstruotą objektą lengvai panaudoti kiek norima kartų kitose vietose. Vadinasi, sukūrus papildomų priemonių, „Dinaminės geometrijos“ programa gali būti efektyviau naudojama matematikos pamokose.

Išsprendus šias „Dinaminės geometrijos“ išplėtimo problemas, toliau buvo siekiama kurti mokomąsias kompiuterines priemones su šia programa. Kad matematikos mokytojai veiksmingai naudotų pamokose „Dinaminę geometriją“, būtina parengti matematikos kursą atitinkančių patogių ir lanksčių brėžinių. Tai ir pradėta daryti – peržiūrėtos bendrosios matematikos mokymo programos, išsilavinimo standartai ir naudojantis „Dinaminės geometrijos" programa parengtas dinaminių brėžinių komplektas kai kurioms matematikos temoms mokyti(-s).

Dinaminių brėžinių komplektas visiškai parengtas tik dviejų pagrindinės mokyklos klasių (9 ir 10) matematikos kursui mokytis: naudojantis „Dinaminės geometrijos" programa sukurta per 900 dinaminių brėžinių. Visa tai sudėta į dvi kompaktines plokšteles (9 ir 10 klasėms atskirai), parengtas trumpas naudotojo vadovas ir aprūpintos visos bendrojo lavinimo mokyklos.

LITERATŪRA

Aritmetika. (1995) Adresas internete: http://www.emokykla.lt/lt.php/istekliai/117?resource_id = 106

Bendrojo lavinimo mokyklos bendrosios programos ir išsilavinimo standartai XI–XII klasei (2003). Vilnius: Švietimo aprūpinimo centras.

BORK, A.; WALKER, D.; POLY, A. (1992) Applications. In *Education and Informatics Worldwide*. Jessica Kingsley Pub., UNESCO, p. 119–172.

DAGIENĖ, V.; JASUTIENĖ, E. (2004). Matematikos mokymas panaudojant „Dinaminę geometriją". *Lietuvos matematikų XIV konferencija*, t. 44, spec. nr., p. 430–434.

DAGIENĖ, V.; JASUTIENĖ, E. (2006). Developing Dynamic Sketches for Teaching Mathematics in Basic Schools, In *The 17th ICMI* (*International Commission on Mathematical Instruction*) *Study: Technology Revised*, Hanoi University of Technology, Vietnam, p. 120–127.

Dešimtainės trupmenos (1995) Adresas internete: http://www.emokykla.lt/lt.php/istekliai/117?resource_id = 158

DIXON, J. (1997) Computer use and visualization in students' construction of reflection and rotion concepts. *School Science and Mathematics*. Browling Green, vol. 97, Iss 7, p. 352–359

HOYLES, C.; JONES, K. (1998). Proof in Dynamic Geometry contexts. In *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, *An ICMI Study*. Kluwer Academic Pub., p. 121–128.

JACKIW, R. N.; FINZER, W. F. (1993) The Geometer's Sketchpad: Programming by Geometry. *Watch What I Do: Programming by Demonstration.* The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England. Adresas internete: http://www.acypher.com/wwid/Chapters/13Sketchpad.html

JASUTIENĖ, E.; STEPANAUSKIENĖ, L. (2006). Matematika su „Dinamine geometrija" – mokomoji kompiuterinė priemonė. Iš *Informatics in Secondary Schools: Evolution and Perspectives*: 2-oji tarptautinė konferencija. Vilnius: TEV.

JASUTIENĖ, E.; STEPANAUSKIENĖ, L.; VANAGAS, V. (2003). *Matematika 9 su „Dinamine geometrija"*. Vilnius: TEV.

JASUTIENĖ, E.; STEPANAUSKIENĖ, L.; VANAGAS, V. (2005). *Matematika 10 su „Dinamine geometrija"*. Vilnius: TEV.

Mokomųjų kompiuterinių priemonių naudojimo ir diegimo tyrimas (2003). Vilnius Lietuvos švietimo ir mokslo ministerija, Informacinių technologijų centras, Vilniaus pedagoginis universitetas. Ataskaita. Adresas internete: http://www.smm.lt/svietimo_bukle/docs/MK_tyrimas.pdf

PAPERT, S. (1995). *Minčių audros: vaikai, kompiuteriai ir veiksmingos idėjos*. Vilnius: Žara.

SCHORR, R. Y.; KOELLNEER-CLARK, K. (2003) Using a Modeling Approach to Analyze the Ways in Which Teachers Consider New Ways to Teach *Mathematics. Mathematical Thinking & Learning*, vol. 5, issue 2/3, p. 191–210

STEPANAUSKIENĖ, L. (2001). *Programos „Geometer's Sketchpad" tyrimas ir taikymas bendrojo lavinimo mokykloje*. Magistro darbas. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos metodikos katedra.

ŠOLYTĖ, I. (2004). *Funkcijų uždavinių sprendimas naudojantis „Dinamine geometrija" VIII–X klasėse*: Bakalauro darbas. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos metodikos katedra.

The Geometer's Sketchpad Dynamic Geometry Software for Exploring Mathematics. Adresas internete: http://www.keypress.com/x5521.xml

VISUALIZATION AND EXPLORING MATHEMATICS USING INFORMATION TECHNOLOGIES

Valentina Dagienė, Eglė Jasutienė

Summary

A five-year long research has been developed in two phases. The first phase was to analyze problematic dimensions of teaching mathematics in schools using computer-based technologies and searching for the most suitable software for the National curriculum of mathematics. The next step was to investigate (also to localize) the "Geometer's Sketchpad" and to built various sets of dynamic sketches for teaching and learning mathematics in basic schools. More than 900 dynamic sketches have been developed within 9th and 10th grades (years 16 and 17) mathematics curriculum. The construction of dynamic sketches shows that it is difficult for teachers of mathematics to construct these sketches. It is not enough to know mathematics but teacher need deeper sophistication in this software.

The principle of the "Geometer's Sketchpad" is rather simple: we have an empty sheet of paper, ruler, pencil, calculator, and several drawing commands, all you need to create. Very often quite complex dynamic images have to be created by using the merest means. In such case just a few steps have to be performed. For example, to create a decision model of inequality the algorithm of approx. 200 has to be implemented. "Geometer's Sketchpad" does not limit the possible number of algorithm steps. It rather depends on the computer facilities as well as a person's invention. Therefore, some problems of construction of dynamic sketches was found and presented in this paper.

Įteikta 2007 m. kovo 2 d.