

INFORMACINĖS TECHNOLOGIJOS MOKYMUI IR STUDIJOS

Interaktyviojo geometrijos vizualizavimo modelis naudojant dinaminės geometrijos paradigmą

Eglė Jasutė

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto doktorantė
Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics, PhD student
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
El. paštas: egle.jasute@gmail.com

Valentina Dagiienė

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto skyriaus vadovė, vyriausioji mokslo darbuotoja, daktarė (HP)
Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics, Head of Department, Chief Researcher, Doctor (HP)
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
El. paštas: valentina.dagiene@mii.vu.lt

Straipsnyje analizuojama interaktyviojo geometrijos vizualizavimo samprata, atskleidžiamos dinaminės geometrijos konstravimo problemos. Pateikiami interaktyviojo vizualizavimo dinaminėje geometrijoje didaktiniai principai: bendrieji, skirti visai veiklos sričiai, ir specialieji, skirti interaktyviam vaizdai. Apibūdinami interaktyviojo vizualizavimo dinaminėje geometrijoje konstravimo principai: geometriniam brėžiniui ir interaktyviam vaizdai. Straipsnyje pateikiamas interaktyviojo vizualizavimo modelis naudojant dinaminės geometrijos paradigmą. Aprašomas modelio taikymo pavyzdys vizualizuojant pagrindinės mokyklos geometrijos temą. Pateikiamas modelio pagrindimas. Nusakomi tolimesnio tyrimo tikslai.

Įvadas

Liaudies išmintis byloja, kad vienas paveldimas pasakas daugiau nei tūkstantis žodžių. Todėl geometriniu brėžiniu galime išreikšti ilgą matematinį įrodymą ar kitus svarius dalykus (Casselman, 2000). Matematinį reiškinių vizualizavimas nuo pat Babilono laikų sudarė sąlygas šiems išlikti ir pasklisti. Šiuolaikinių dinaminį grafinių kompiuterių programų ir kitų mokymo technologijų atsiradimas itin veikia geometrijos vizualizavimą ir jos mokymą (Arcavi, 2003; Boz, 2005; Hanna, Sidoli, 2006). Atsiranda galimybių ne tik spręsti sudėtingus geometrinius uždavinius, bet ir pateikti juos aiškiau, suprantamesne forma.

Naudojant geometrijos vizualines priemones lengvėja sudėtingų uždavinių sprendimas, juos galima pateikti mokiniams. Vizualizuojant geometrinius konceptus, aksiomas ir teoremas galima lavinti mokinių vizualųjį mąstymą, vaizduotę, padėti susikaupti prie uždavinio sprendimo. Dėl to keičiasi matematikos didaktikos specialistų požiūris į geometrijos, statistikos, skaičiavimų, diferencialinių lygčių, funkcijų mokymą (Hohenwateret ir kt. 2008). Vizualizuojant matematinės idėjas neretai sukuriama naujos geometrijos vizualizavimo priemonės, skirtos mokinių mokymosi efektyvumui palaikyti, geometriniais uždaviniais spręsti (Tall, 1998). Keičiasi požiūris į matematikos didaktiką – technologijos tampa didaktikos reikšminga sudedamąja

dalimi. Nuo Steinbring pateikto „didaktinio trikampio“ (Steinbring, 2005), kur siejami trys pagrindiniai elementai mokiny–mokytojas–matematika, pereinama prie „didaktinio tetraedro“, kur pridėdamas dar vienas elementas – technologijos, ir trikampis tampa tetraedru su keturiais elementais: mokytojas–mokinys–matematika–technologijos, o kiekviena „didaktinio tetraedro“ siena vaizduoja atskirus mokytojo, mokinio, matematikos žinių ir technologijos sąryšius (Olive, Makar, 2010).

Matematikos mokytojai dažniausiai yra linkę tikėti ir pabrėžia kompiuterinės (dinaminės) geometrijos naudą mokinių mokymuisi, neabejoja, kad mokiniai geba geriau suprasti geometrijos sąvokas, aksiomas, teoremas, ypač įrodymų konstravimą, tačiau patys prisipažįsta retai taikantys šias technologijas. Dažniausiai nurodoma kliūtis – nepakankami techniniai įgūdžiai, kurie neleidžia patiems efektyviai kurti naujų pavyzdžių. Dažnai matematikos mokytojai nemoka sparčiai naudotis dinaminės geometrijos priemonėmis ir neturi laiko įgyti šios kompetencijos. Matematikos mokytojams būtų galima padėti vizualizuojant mokyklinę geometriją pasinaudojus dinaminės geometrijos priemonėmis. Pagrindinis šio straipsnio tikslas – suformuoti interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelį naudojant dinaminės geometrijos paradigmą. Dinaminės geometrijos paradigmą apibūdinsime kaip geometrijos mokymo programinę įrangą, kurios pagrindinė savybė – dinaminių brėžinių konstravimas, analizavimas, taip pat animacija (pavyzdžiui, „Geometer’s SketchPad“, „Cabri“).

Remdamiesi literatūros analize pateiksime interaktyvaus vizualizavimo sampratą, atskleisime dinaminės geometrijos konstravimo problemas. Straipsnyje pateikiamas ir pagrindžiamas interaktyviojo vizualizavimo naudojant dinaminę geometriją modelis.

Interaktyviojo geometrijos vizualizavimo samprata

Atlikta keletas tyrimų aiškinantis *vizualizavimo* (angl. *visualization*, *spatial thinking*, *visual image*) sąvokos interpretaciją (Bishop, 1988; Zimmermann, Cunningham, 1991; Presmeg,

1996; Boz, 2005; Hanna, Sidoli, 2006). Vizualizavimas remiasi idėja, kaip nematomą padaryti matomu. Pavyzdžiui, matematikoje vizualizuojamos matematinės taisyklės, tada mokinys gali lengviau perprasti matematikos reiškinių, lygtį ar pan. Mokslo publikacijose vizualizavimo sąvoka suprantama ir kaip veiksmažodinis daiktavardis, reiškiantis veiklą, procesą, ir kaip daiktavardis, reiškiantis vaizdinį, artefaktą (Bishop, 1988). Išskiriamos trys vizualizavimo interpretacijos. 1) vizualizavimas kaip išskirtinai protinis kuriamasis procesas, kurio metu formuojamas vaizdinys (Piaget, Inhelder, 1971; Presmeg, 1991), 2) vizualizavimas kaip vaizdinio kūrimo procesas (vaizduotėje, popieriaus lape pieštuku, naudojant kompiuterines technologijas) ir gebėjimas tą vaizdinį efektyviai panaudoti kitiems matematikos reiškiniams, jų supratimui (Hershkowitz, 1989), 3) vizualizavimas kaip matematikos konceptų, principų, sprendimų, geometrinių ir grafinių vaizdų naudojimas ir kūrimas popieriuje ar kompiuteriu (Zimmermann, Cunningham, 1991). Pastarasis apibūdinimas taikomas ir vaizdavimo sąvokai. *Vaizdavimas* – tai tarpinis ryšys tarp technologijų ir mokinio supratimo (Moreno-Armella, 1999). Pačios technologijos keičia žinių kūrimo procesą – mokymąsi (Karadag, McDougall, 2009).

Mokslinėje literatūroje pasitaikanti sąvoka *interaktyvusis (arba dinaminis) geometrijos vizualizavimas* apibūdina veiklą, kai yra galimybė judinti geometrines figūras – paprastai naudojantis kompiuteriu, tačiau galima ir mintyse, pasitelkus išlavintą vaizduotę (Boz, 2005). Lavindamas interaktyvųjų vizualizavimą asmuo atlieka figūros transformacijas (pasukimą, ištempimą, atvaizdavimą ir kt.) kompiuterio ekrane arba savo vaizduotėje ir taip sprendžia geometrijos uždavinius. Yra žinomas metodas, kaip mokinys, lavindamas savo vizualizavimo gebėjimą, gali atlikti geometrinių objektų transformacijas vaizduotėje (Presmeg, 1986).

Mūsų tyrimo objektui artimiausia Zimmermanno ir Cunninghamo vizualizavimo samprata, tik naudojant siauresnę sritį. Interaktyvusis geometrijos vizualizavimas yra geometrijos konceptų, aksiomų, teoremų ir problemų grafinių vaizdų kūrimas ir naudojimas dinaminės geometrijos aplinkoje.

Dinaminės geometrijos paradigma

Dinaminė geometrija – priemonė arba priemonių visuma, kuri pakeičia braižymą pieštuku, liniuote ir skriestuvu popieriaus lape į galimybę tai daryti greičiau, tiksliau ir aprėpiant visą uždavinių aibę (keičiant parametrus) kompiuterio ekrane (Freixas, Joan-Arinyo, Soto-Riera, 2008). Dinaminės geometrijos vizualizavimo galimybės, palyginti su įprastu statiniu vizualizavimu, yra platesnės: geometriniai objektai gali būti interaktyviai tempiami ir jungiami ar dalijami, statiniai objektai paverčiami interaktyviais iš karto ekrane; be to, vienas brėžinys gali vaizduoti visą geometrinių objektų klasę (Scher, 2002).

Pagrindinės dinaminės geometrijos galimybės: braižyti ir konstruoti Euklido geometrijos brėžinius, transformuoti (pastumti, pasukti, ištempti arba atspindėti) geometrinius objektus, sukurtais mygtukais animuoti brėžinius, braižyti funkcijų grafikus Dekarto ir polinėse koordinatėse, užrašyti tiesių ir apskritimų lygtis, išmatuoti geometrinių objektų dydžius pasirinktais matavimo vienetais, atlikti įvairias aritmetines matavimų operacijas; brėžinius papildyti užrašais (antraštelėmis, svarbiomis pastabomis, formuluotėmis ir pan.), sudaryti matematinius reiškinius, kurti scenarijus, kuriais būtų automatiškai aprašoma brėžinio kūrimo seka (Stepanauskienė, Jasutienė, 2003). Svarbiausia dinaminės geometrijos savybė ta, kad tikslingai sukonstruotas geometrinės figūras galima transformuoti palaikant sukonstruotus geometrinius ryšius (Gorgorio, Jones, 1996). Keičiant geometrinių objektų dydžius matavimai taip pat kinta. Šios galimybės sudaro sąlygas geometrijos mokymosi aplinkai kurti.

Dinaminės geometrijos naudojimas pagrįstas trijų lygmenų konstravimu: 1) tiesioginis konstravimas – paprasčiausias dinaminių brėžinių konstravimo būdas, kuriam nereikia ypatingų matematinių žinių ar sudėtingesnės programos valdymo; 2) konstravimas, pagrįstas tiesioginiu geometrijos programavimu, – tam būtina iš anksto apgalvoti norimos konstrukcijos algoritmą (pavyzdžiui, kaip nubraižyti dinaminį geometrinių objektų su tam tikromis savybėmis,

naudojantis tik skriestuvu, liniuote ir keliomis programos komandomis); 3) konstravimas, pagrįstas sudėtingesniu geometriniu programavimu, – dinaminiai brėžiniai konstruojami pagal iš anksto apgalvotą algoritmą, naudojantis visomis programos priemonėmis (ir tiesioginėmis, ir sudėtingesniais algebriniais skaičiavimais). Sudėtingumas yra būsimo brėžinio algoritmas – jame naudojami algebriniai skaičiavimai (Dagienė, Jasutienė, 2007).

Dėl šios priežasties matematikos mokytojas (ir mokinys) dažnai apsiriboja pirmuoju lygmeniu, nes kuriant sudėtingesnę brėžinių sistemą reikia ne tik matematinių įgūdžių, bet ir mokėjimo programuoti (Casselman, 2000). Nors mokytojai ir tiki dinaminės geometrijos efektyvumu mokant transformacijos, funkcijų ar geometrinių sąvokų, tačiau jie neturi pakankamai įgūdžių naudoti informacines technologijas ir tai daro įtaką dinaminės geometrijos pasirinkimui mokant matematikos (Stols, Kriek, 2011).

Čia gali būti išvengiama dinaminės geometrijos naudojimo mokykliniam matematikos kursui vizualizuoti problema – mokytojas dažnai nepasitiki savo gebėjimu naudoti dinaminę geometriją ir negali skirti laiko naujai kompetencijai įvaldyti, todėl grįžta prie tradicinių vizualizavimo metodų. Siekdami išspręsti šią problemą, turime numatyti didaktinius interaktyviojo vizualizavimo principus ir parengti interaktyviojo geometrijos vizualizavimo modelį, kuris tiktų dinaminės geometrijos paradigmą įgyvendinti mokykloje. Šis modelis suteiktų galimybę mokytojams nuosekliai naudotis interaktyviais vaizdais mokant geometrijos.

Didaktiniai interaktyviojo vizualizavimo dinaminėje geometrijoje principai

Taikant informacines technologijas išvengiama naujos galimybės ugdyti matematinį mąstymą, ypač kreipiamas dėmesys į geometrinio vizualizavimo tobulinimą naudojant grafines dinaminės geometrijos programas. Kai kurie mokslininkai mano, kad matematikos mokymas taikant dinamines kompiuterines programas tapo toks efektyvus, kad galima

pereiti nuo statinių algebrinių struktūrų prie interaktyvių jų interpretacijų, ryšių tarp objektų nagrinėjimo (Galbraith, 2006; Moreno-Armella, Hegedus, Kaput, 2008). Dažniausiai dinaminės geometrijos efektyvumas pagrindžiamas sprendžiant atskiras matematikos problemas (Oliver, 2000; Gillis, 2005; Patsiomitou, 2008). Tačiau beveik visiškai nesirūpinama nuosekliu matematikos turinio interaktyviuoju vizualizavimu.

Mokslininkai matematinį vizualizavimą dinaminėje geometrijoje nagrinėja trimis aspektais: 1) progresyvių vizualinių objektų tyrimas, pavyzdžiui, automatiniai sudėtingų teoremų įrodymai, trimatės funkcijos, fraktalų tyrimai, 2) geometrinių ar algebrinių konceptų ir taisyklių vizualizavimas, 3) vizualus matematikos aiškinimas (Gorgorio, Jones, 1996). Šiame straipsnyje remiamasi antruoju aspektu, t. y. geometrijos konceptų, aksiomų, teoremų ir jų įrodymų bei uždavinių interaktyviuoju vizualizavimu dinaminėje geometrijoje. Turėdami omeny šį aspektą, išskirsime ir apibūdinsime esminius geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje didaktinius principus.

Remdamiesi šiuolaikinės didaktikos metodologija išskirsime dvi principų grupes: 1) bendruosius, taikomus visai veiklos sričiai ir atitinkančius iškeltus tikslus, turinį ir kompiuterinės sąsajos reikalavimus; 2) specialiuosius, taikomus vaizdai (tiksliau, brėžiniams) siekiant sukurti interaktyvų vizualizuojamą vaizdą, parmetą mokymo metodika.

Bendrieji principai:

Nepriklausomumas nuo konkrečios dinaminės geometrijos aplinkos. Vizualizuojamas brėžinys gali būti sukurtas remiantis viena dinaminės geometrijos aplinka, tačiau teorinis modelis pritaikomas bet kurioje dinaminės geometrijos aplinkoje, turinčioje panašias galimybes. Nors visose Lietuvos mokyklose yra įdiegta „Dinaminė geometrija 4.06“, tačiau mokyklos gali naudotis įvairiomis kitomis panašias galimybes turinčiomis programomis (įvairių versijų „Geogebra“, „Geometer SketchPad“). Mokytojas turi galimybę pasirinkti jam priimtinausią programą.

Priklausomumas nuo matematikos ugdymo programos. Vizualizuojama veiklos sritis turi tenkinti geometrijos ugdymo turinį ir lavinti gebėjimus ir įgūdžius, numatytus matematikos ugdymo programoje: įvairių figūrų ir kūnų pažinimas, figūrų klasifikavimas, jų savybių įrodymas ir taikymas, įvairių objektų ir jų savybių išmanymas, konstravimo, braižymo užduočių atlikimas (Pradinio..., 2008).

Nesudėtingas valdymas. Papildomi brėžinio valdymo mygtukai, animacija, žingsninis braižymas, pagalba vartotojui, papildomų komandų rinkinys (pvz., kampų, kraštinių žymėjimams, taisyklingų figūrų braižymas).

Vientisa struktūra pagal brėžinio paskirtį. Brėžinio, skirto mokinio įrodymo įgūdžiams lavinti, struktūra gali skirtis nuo geometrinio koncepto aiškinimo brėžinio struktūros. Todėl reikia suklasifikuoti veiklos sritis, kurioms bus kuriami brėžiniai, pagal jų tikslus ir kiekvienai grupei numatyti tinkamiausią struktūrą.

Įvairių veiklų derinimas. Keleto mokinio veiklų interaktyviame vaizde suderinimas, pavyzdžiui, objektų tempimas ir konstravimas, objektų kitimų, sąryšių stebėjimas ir paaiškinimas, užduočių, patarimų, teiginių, išvadų skaitymas, parametrų įrašymas ir kt.

Kalbėdami apie interaktyvaus vaizdo principus išskiriame juos pagal du aspektus: 1) geometrinio brėžinio konstravimo principai ir 2) interaktyvaus vaizdo principai. Casselman apibrėžia aštuonis gero geometrinio vizualizavimo reikalavimus: reikia supaprastinti brėžinį, t. y. pašalinti tai, kas blaško, palikti tik tai, kas būtina brėžinyje išreiškiant mintį; reikia paryškinti esminius brėžinio elementus; brėžinys savaime turi papasakoti visą istoriją; teksto interpretacijų geometriniais brėžiniais turi būti pakankamai problemai pavaizduoti, reikia numatyti jų ryšius; reikia apgalvoti, kaip brėžinys bus naudojamas kontekste; atsakyti į klausimą, ar brėžinys tikrai perteikia problemą; naudotis vaizduote, nes mažas pakeitimas gali iškreipti visą brėžinio perteikiamą mintį; ir vis tiek nepasikliauti vien brėžiniu, nes asmenys skirtingai interpretuoja vaizdus (Casselmann, 2000). Galvodami apie konkretų geometrinį brėžinį remiamės jo patarimais.

Tačiau mums ne mažiau svarbu nurodyti principus, kuriais remdamiesi kuriame visą interaktyvų vaizdą:

Suskaidymas. Veiklos sritis suskaidoma į dalis: konceptus, aksiomas, teoremas, uždavinius ir pan. Kiekviena dalis vizualizuojama atskirai. Šis principas grindžiamas sudėtingos problemos skaidymu į dalis ir jis taikomas įvairiose srityse.

Baigtinumas. Jis reiškia, kad 1) vaizdas ar jų sistema turi apimti visą vizualizuojamą veiklos sritį; 2) vaizdas turi integruoti ir algebrinius, ir geometrinius ir, jei įmanoma, realius vaizdus; 3) vaizdas turi suteikti visą informaciją apie to brėžinio naudojimą.

Siejamos algebrinės ir geometrinės interpretacijos dinaminėje terpėje perteikiant visuminį matematikos vaizdą. Pasaulyje algebros ir geometrijos mokymas yra labai integruojamas. Šia JAV itin paplitusia matematikos mokymo idėja remiasi ir Anglijos matematikai (Jones, 2010). Dinaminė geometrija padeda įgyvendinti šią idėją. Vienas iš pagrindinių dinaminės geometrijos pranašumų – galimybė integruoti algebrines ir grafines struktūras viename interaktyviame vaizde (Cuoco, Goldenberg, 1997)

Lankstumas. Turi būti galimybė brėžinį modifikuoti pagal poreikius – supaprastinti, keisti parametrus, pradinę padėti, paslėpti objektus ar sukonstruoti naujus. Taigi, paliekama galimybė pritaikyti interaktyvų vaizdą mokytojo numatomam klases ar mokinio geometrinių gebėjimų

ugdymui; pagal mokytojo kompetenciją (kuo daugiau norima modifikuoti, tuo geresnių dinaminės geometrijos naudojimo gebėjimų reikia); pagal besikeičiantį mokymo turinį.

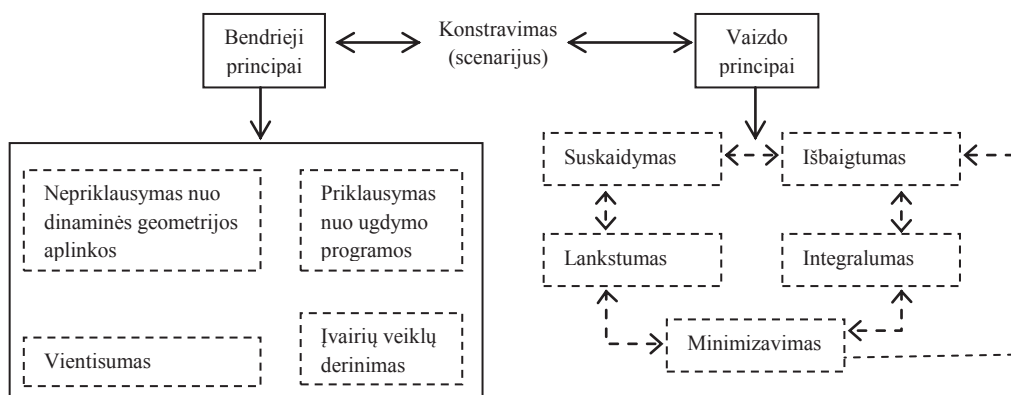
Minimizuotas vaizdas, t. y. interaktyvus vaizdas negali būti perkrautas papildomais objektais (tekstu, mygtukais, veiklomis, paveikslais ir pan.). Atlikus minimizavimą reikia patikrinti, ar išliko patenkinti nustatyti principai. Kuriamo interaktyviojo vizualizavimo modelio didaktinių principų sąryšiai pateikiami 1 pav. vaizduojama schema.

Geometrijos interaktyviojo vizualizavimo dinaminėje geometrijoje modelis

Modelis – tai išorinis ir detalus realybės srities atvaizdavimas. Realybės sritis suprantama kaip asmens suvokiama sritis, kurios sukurtą modelį tikimasi naudoti šiai realybei suvokti, tvarkyti ir valdyti kuriuo nors būdu (Pidd, 1999). Šis apibrėžimas atitinka interaktyvų vizualizavimo modelį. Šiuo atveju mus dominanti sritis yra geometrija. Jos atvaizdavimas dinaminėje geometrijoje (vizualizavimas) naudojamas geometrijai suprasti, sisteminti, analizuoti.

Prieš sudarydami teorinį modelį trumpai apibūdinsime interaktyviojo vizualizavimo dinaminėje geometrijoje konstravimo principus:

Klasifikavimas. Suklasifikuojami veiklos srities (geometrijos) vaizdai pagal jų paskirtį:



1 pav. Didaktiniai geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje principai

koncepto vizualizavimas, teiginio, teoremos vizualizavimas, teoremos įrodymo vizualizavimas, uždavinio vizualizavimas. Šis principas išplaukia iš didaktinio suskaidymo principo.

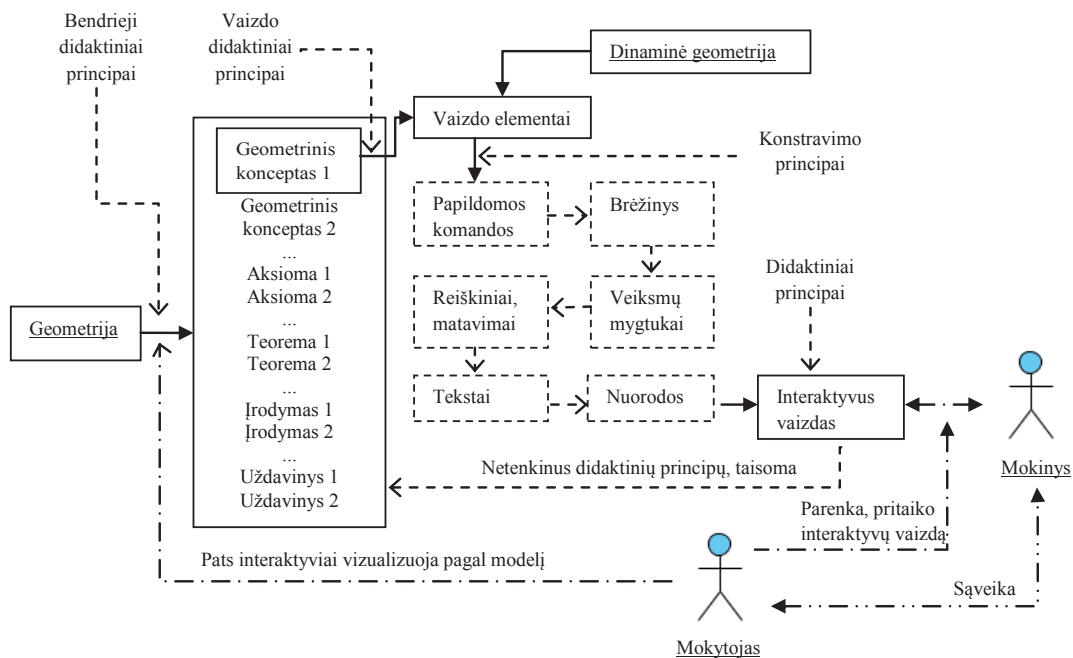
Automatizavimas. Tai nėra tikrasis automatizavimo procesas, tik vienos darbo dalies minimizavimas sukuriant suklasifikuotų vaizdų šablonus, kuriuose konstruojami atitinkami brėžiniai. Šablonas gali turėti keletą arba visus šiuos elementus: 1) tekstų sritį, 2) brėžinių sritį, 3) algebrinių reiškinių, parametrų, matavimų sritį, 4) numatomos pagalbos sritį, 4) nuorodų į kitus vaizdus sritį, 5) veiksmų (mygtukų, animacijos) sritį, 6) papildomų komandų scenarijų (pvz., kampų, atkarpų žymėjimai, geometrinės figūros).

Skaidymas į dalis. Vaizdo (brėžinio) konstravimo padalijimas į dalis ir numatomas kiekvieno komponento kūrimo eiliškumas: 1) papildomų komandų kūrimas, 2) brėžinio scenarijaus kūrimas ir brėžinio konstravimas 3) veiksmų ir animacijos kūrimas, 4) reiškinių ir matavimų

skaičiavimas ir kūrimas 5) tekstų parinkimas ir surašymas, 6) nuorodų kūrimas. Daugiausia pastangų ir informacinių technologijų gebėjimų reikalauja brėžinio scenarijaus kūrimas (algoritmas), brėžinio konstravimas ir ryšių tarp brėžinio ir kitų elementų sudarymas. Šiame etape reikia rasti sudėtingų konstrukcijų konstravimo sprendimus pasitelkus paprasčiausias braižymo komandas (liniuotę ir skriestuvą), iš anksto numatyti tikslingus dinامينius ir animuojamus objektus. Dinaminė geometrija remiasi principu – sudėtingų objektų konstravimas naudojant ryšius tarp paprastų elementų. Todėl konstruojant brėžinį būtina jį suskaidyti ir nustatyti ryšius tarp objektų.

Realizavimas. Interaktyvus vaizdas integruojamas į matematikos mokymo (mokymosi) procesą.

Galutinis modelio rezultatas – interaktyvus geometrinio koncepto (aksiomos, teoremos, įrodymo, uždavinio) vaizdas – turi tenkinti visus aprašytus didaktinius principus. Patikrinti būti-



2 pav. Interaktyvaus geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje modelis ir jo ryšys su mokiniu ir mokytoju

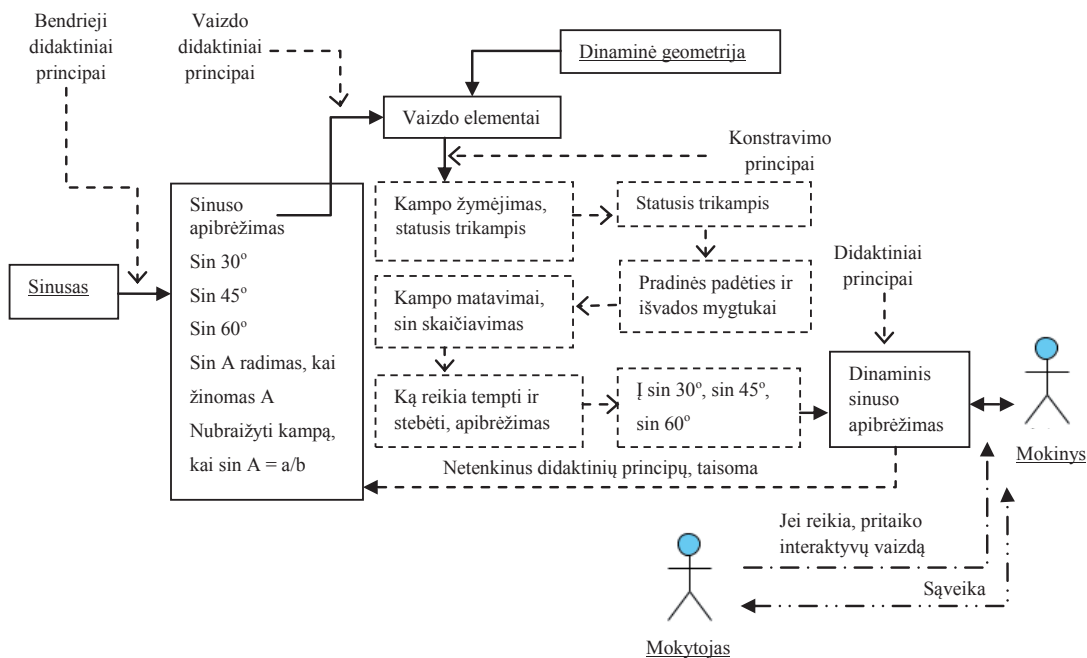
na, nes kūrimo metu dėl specifinių pasirinktos dinaminės geometrijos galimybių galima iškreipti numatomą (įsivaizduojamą) interaktyvų vaizdą. Tokiu atveju grįžtama į pradžią ir taisoma, kol gaunamas tinkamas interaktyvus vaizdas.

Modelis turi būti pritaikomas ir naudingas realiame gyvenime, šiuo atveju geometrijos mokymui: mokinio suvokimui ir mokytojo darbui su informacinėmis technologijomis palengvinti. Pagal modelį sukurto interaktyvaus vaizdo naudotojas yra tiek mokinys, tiek mokytojas. Mokytojas parenka interaktyvius vaizdus pagal mokymo (mokymosi) sritį, jei reikia, pritaiko prie klasės ar mokinio gebėjimų ir pateikia. Jei mokytojas geba, gali pats pagal modelį kurti interaktyvius vaizdus.

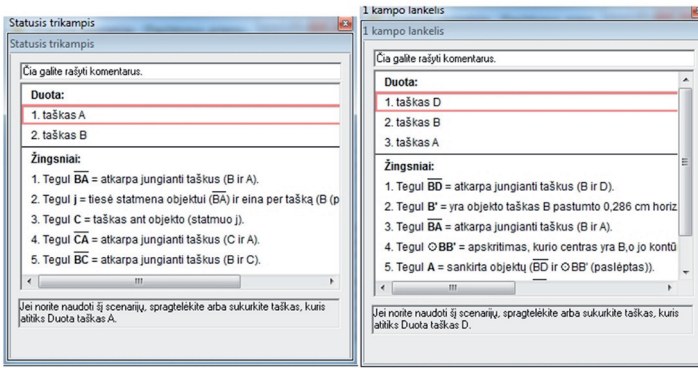
Suprantama, pagal modelį sukurtas interaktyvus vaizdas nepakeičia tiesioginio mokinio ir mokytojo bendravimo, nors kūrybiškas jo taikymas gali padėti mokyti ir nuotoliniu būdu. Šiaip ar taip, mokytojo vaidmuo išlieka toks pat – jis pataria, nukreipia reikiame linkme, konsultuoja.

Smailiojo kampo sinuso vizualizavimas remiantis modeliu

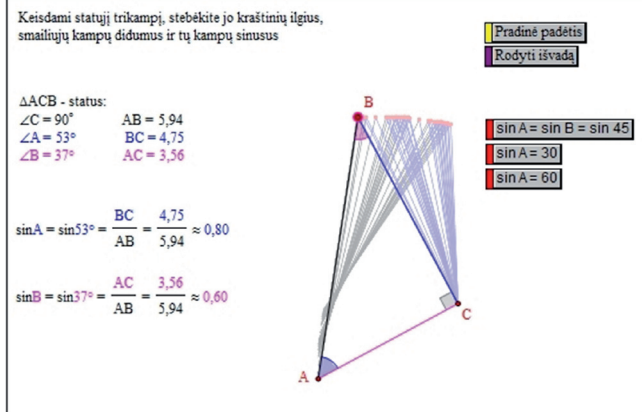
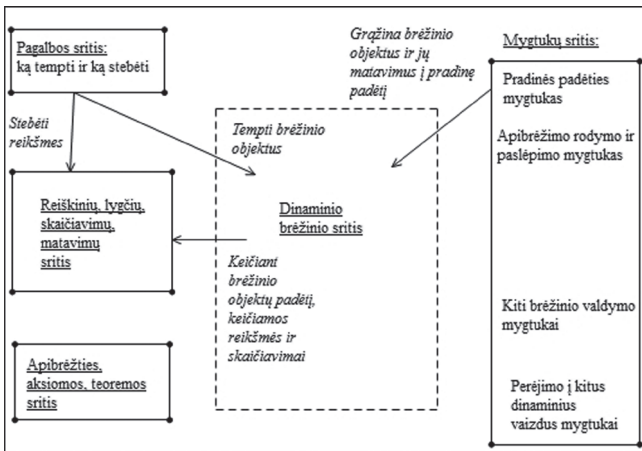
Iliustruodami interaktyviojo vizualizavimo dinaminėje geometrijoje modelio taikymą pasirinkome 10 klasės geometrijos temą – smailiojo kampo sinusas. Konstravimui naudosime *Dinaminė geometrija* (angl. *Geometer SketchPad*) aplinką. Remdamiesi apibrėžtais didaktiniais principais pirmiausia suskaidome temą į dalis: sinuso apibrėžimas; $\sin 30^\circ$; $\sin 45^\circ$; $\sin 60^\circ$; $\sin A$ radimas, kai žinomas $\angle A$ didumas; nubraižyti kampą, kai $\sin A = a/b$. Taigi reikia sukonstruoti 6 interaktyvius vaizdus, vizualizuojančius išskirtas dalis. Atsižvelgę į temų dalis klasifikuojame vaizdus ir išskiriam du vaizdų šablonus: apibrėžimo vizualizavimas, kuo vaizduosime sinuso apibrėžimą, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$ ir žingsninis užduoties atlikimo vizualizavimas, kuriuo vaizduosime $\sin A$ radimą, kai žinomas $\angle A$ didumas, bei kampo braižymą, kai $\sin A = a/b$. Aptarsime vieno iš jų – *sinuso apibrėžimo* – interaktyvaus vaizdo konstravimą (3 pav.).



3 pav. Modelio taikymas smailiojo kampo sinusui apibrėžti



4 p a v. *Kairėje – stačiojo trikampio braižymo scenarijus, dešinėje – kampo lankelio scenarijus*



5 p a v. *Viršuje – brėžinio struktūra ir ryšiai tarp elementų, apačioje – interaktyvus vizualizuotas sinuso apibrėžimas: keičiamas kampo A didumas ir kraštinių ilgių tempiant trikampio viršūnes A ir B*

Sukuriame apibrėžimo vaizdo šablona: 1) sukuriame papildomas komandas, kurias naudosime visuose smailiojo kampo sinuso interaktyviuose vaizduose – stačiajam trikampiui braižyti ir kampų žymėjimui lankeliu (4 pav.); 2) numatome vaizdo elementus ir jų padėtį brėžinyje – interaktyvaus vaizdo struktūrą (5 pav.).

Konstruojami elementai dinaminėje geometrijoje. Jei reikia, atskirai aprašomi

konstravimo algoritmai. Šiuo atveju mums reikalingas tik stačiojo trikampio brėžinys, kurio scenarijų jau parašėme, todėl konstruoti galima iškart dinaminės geometrijos brėžinio lape. Šiame pavyzdyje sudėtingiau konstruojami matematiniai užrašai – stačiojo trikampio kraštinių santykiai raidėmis ir reikšmėmis, tačiau jie nereikalauja programavimo gebėjimų, užtenka matematinių ir informacinių technologijų naudojimo gebėjimų (5 pav.). Ne mažiau svarbu paryškinti arba išskirti spalvomis vizualizuojamo brėžinio elementus. Geriausia iš anksto numatyti, kokie elementai kokia spalva bus žymimi visuose brėžiniuose (pvz., tempiamas taškas visada raudonas, mėlynas statinis ir jo ilgi atitinkantis matmuo taip pat mėlynas ir pan.).

Analogiškai konstruojami ir kiti trys interaktyvūs vaizdai. Likę du panašiai konstruojami pagal kitą šablona. Visi interaktyvūs vaizdai sudedami į vieną interaktyvią knygą (dinaminės geometrijos galimybė). Vizualizavus smailiojo kampo sinusa, galima išplėsti mokinių veiklą papildomomis užduotimis. Jos aprašomos dinaminės geometrijos lapuose, kuriuose mokiniai jas ir atlieka, pavyzdžiui, ištirti, kaip kei-

čiausi smailiojo kampo sinusas, kai didėja stačiojo trikampio kampas; nubraižyti kampą dinaminėje geometrijoje, kai žinomas statinio ir įžambinės santykis, ir pan.

Vizualizuotas smailiojo kampo sinuso interaktyvus vaizdas gali būti naudojamas įvairioje mokymo (mokymosi) veikloje: mokinys nagrinėja sinuso reikšmių kitimą, kai keičiami stačiojo trikampio kraštinių ilgiai, keičiamas kampo A didumas, atlieka užduotis; mokytojas demonstruoja šią vizualizuotą interpretaciją aiškindamas mokiniams sinuso apibrėžimą ir kt.

Interaktyviojo vizualizavimo modelio pagrindimas

Interaktyviojo geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje modelis sėkmingai pritaikytas vizualizuojant 9–10 klasių plokštumos geometrijos kursą. Sukurta 190 interaktyvių geometrijos vaizdų: 9 klasės trikampių panašumui – 78, apskritimui, skrituliui – 90, uždaviniams – 151; 10 klasės smailiojo kampo funkcijoms – 83, trikampio sprendimui – 74, uždaviniams – 101.

Pagal modelį vizualizuotos dar kelios 9–10 klasės matematikos veiklos sritys: funkcijos tiesinių lygčių sistemos, tiesinės ir kvadratinės lygtys. Šioms veiklų sritims iš viso sukurti 394 interaktyvūs vaizdai vizualizuojantys teoriją ir uždavinius. Visi interaktyvūs vaizdai sudėti į kompiuterines mokymosi priemones. Priemonės išleistos dviem atskiromis kompaktinėmis plokštelėmis su vartotojo instrukcija ir trumpomis metodinėmis rekomendacijomis. Jos išdalytos visoms Lietuvos mokykloms. Mokytojai jas bando savo pamokose.

Toliau bus atliekami išsamūs tyrimai, kokią įtaką pagal modelį sukurtos mokymosi priemonės daro mokinių matematinių gebėjimų vystymui ir matematikos mokymo procesui.

LITERATŪRA

ARCAVI, Abraham (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Education studies in mathematics*, p. 215–241.

BISHOP, Alan J. (1988). A review of research on visualization in mathematics education. In *Proceedings of the 12th PME International Conference*, 1, p. 170–176.

Išvados

Interaktyviojo geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje modelio sukūrimo tikslas – palengvinti geometrijos vizualizavimą. Modeliui naudoti būtina turėti matematikos, matematikos didaktikos žinių, algoritmų konstravimo ir pasirinktos dinaminės geometrijos naudojimo gebėjimų. Taigi modelį vizualizavimui gali taikyti ir šiais gebėjimais pasižymintis matematikos mokytojas. Interaktyviojo geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje modelį galima pritaikyti ir funkcijoms, tiesinių lygčių sistemoms, tiesinėms ir kvadratinėms lygtims vizualizuoti.

Pagal modelį sukurti interaktyvūs vaizdai yra skirti tiek mokytojui mokant, tiek mokiniui savarankiškai mokantis. Tačiau modelio sukonstravimas dar neišsprendžia mokytojo ir dinaminės geometrijos santykio problemos. Todėl vis tiek dar lieka neatsakytų klausimų:

1) Dinaminės geometrijos pasirinkimas. Modelio pagrindas yra dinaminės geometrijos pasirinkimas, nes nuo jos galimybių priklauso vaizdo interaktyvumas ir konstravimo sudėtingumas. Lieka neišspręsta problema – tinkamos dinaminės geometrijos pasirinkimas. Todėl ateityje tikimasi išsiaiškinti, kurios pasaulyje esamos dinaminės geometrijos programos geriausiai tinka vizualizuoti pagal šį modelį.

2) Reikalingas mokytojo ir mokinio grįžtamas ryšys. Nors pagal modelį sukurtos mokymo priemonės 9–10 klasės matematikos kursui vizualizuoti ir taikomos Lietuvos mokyklose, tačiau grįžtamojo ryšio dar negauta. Taigi, neatsakytas dar vienas klausimas – kokią įtaką pagal modelį sukurti interaktyvūs vaizdai daro mokinių matematinių gebėjimų ugdymui, matematikos mokymo procesui ir mokytojo interaktyvių priemonių naudojimui matematikos pamokoje.

BOZ, Nihat (2005). Dynamic visualization and software environment. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, TOJET January, no. 4, p. 26–32.

CASSELMAN, Bill (2000). Pictures and Proofs. *Notices of the AMS*, 47, p. 1257–1266.

CUOCO, Albert A.; GOLDENBERG, Paul E. (1997). Dynamic Geometry as Bridge from Euclidean Geometry to Analysis. *Geometry turned on!: dynamic software in learning, teaching, and research*. Mathematical Association of America, p. 33–45.

DAGIENĖ, Valentina; JASUTIENĖ, Eglė (2007). Informacinės technologijos matematikai vizualizuoti ir tyrinėti. *Informacijos mokslai*, t. 41, p. 76–88.

FREIXAS, Marc; ARINYO, Robert Joan; SOTORIERA, Antoni (2008). A constraint-based dynamic geometry system. In *Proceedings of Computer-Aided Design*, p. 151–161.

GALBRAITH, Peter (2006). Students, mathematics, and technology: assessing the present – challenging the future. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 37(3), p. 277–290.

GORGORIO, Nuria; JONES, Keith (1996). *Elements of the Visualisation Process within a Dynamic Geometry Environment*. Invited paper presented to Topic group on The Future of Geometry at the 8th International Congress on Mathematical Education, p. 14–21.

HANNA, Gila; SIDOLI, Nathan (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical. *ZDM Mathematics Education*, 39, p. 73–78.

HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith; KREIS, Yves; LAVICZA, Zsolt (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. *11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, Nuevo Leon, Mexico [žiūrėta 2011 m. balandžio 25 d.]. Prieiga internetu: <<http://tsg.icme11.org/document/get/666>>.

JONES, Keith (2010). Linking Algebra and Geometry in the School Mathematics Curriculum. In *Future Curricular Trends in School Algebra And Geometry: Proc. of A Conference* (HC) (Research in Mathematics Education) Mar 31, p. 203–215.

KARADAG, Zekeriya; MCDUGALL, Douglas (2009). Visual explorative approaches to learning mathematics. In *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Atlanta, GA: Georgia State University, vol. 5, p. 1630–1636.

MORENO-ARMELLA, Luis; HEGEDUS, Stephen, J.; KAPUT, James, J. (2008). From static to dy-

namic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 68, p. 99–111.

OLIVE, John (2000). Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning. *Ensino e Aprendizagem de Geometria*. Lisboa: SPCE, p. 7–33.

OLIVE, John; MAKAR, Katie; HOYOS, Verónica; KOR, Kee Liew; KOSHELEVA, Olga; STRÄSSER, Rudolf (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies. *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, New ICMI Study Series, no. 113(2), p. 133–177.

PATSIOMITOU, Stavroula (2008). Custom tools and the iteration process as a referent point for the construction of meanings in a DGS environment. *ATCM 2008*, Thailand [žiūrėta 2011 m. balandžio 25 d.]. Prieiga per internetą: <http://atcm.mathandtech.org/EP2008/papers_full/2412008_15000.pdf>.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel (1971). *Mental imagery and the child*. London: Routledge & Kegan Paul.

PIDD, Michael (1999). Just Modeling Through: A Rough Guide to Modeling. *Interfaces*, no. 29, 2 March–April, p. 118–132.

Pradinio ir pagrindinio ugdymo programos (2008) [žiūrėta 2011 m. balandžio 7 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.smm.lt/ugdymas/bendrasis/ugd_programos.htm>.

PRESMEG, Norma C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol. 6(3), p. 42–46.

PRESMEG, Norma C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, p. 205–235.

SCHER, Daniel (2003). Dynamic visualization and proof: A new approach to a classic problem. *The Mathematics Teacher*, no. 96(6), p. 394–398.

STEINBRING, Heinz (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. New York: Springer. 236 p. ISBN 978-0-387-24251-4

STEPANAUSKIENĖ, Laura; JASUTIENĖ, Eglė (2003). *MKP „Dinaminė geometrija“ diegimo seminaro metodinė medžiaga*. Vilnius: Telekomas.

STOLS, Gerrit; KRIEK, Jeanne (2011). University of South Africa. Why don't all maths teachers

use dynamic geometry software in their classrooms? *Australasian Journal of Educational Technology*, no. 27(1), p. 137–151. Prieiga per internetą: <<http://www.ascilite.org.au/ajet/ajet27/stols.html>>.

TALL, David (1994). A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics. In *Plenary Presentation, Proceedings of the 46th Conference of CIEAEM*, Toulouse, France, vol. 1, p. 15–27.

TALL, David (1998). Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities & Realities. In *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*. Seville: SAEM Thales, p. 65–82.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America. 224 p. ISBN 0883850710.

A MODEL OF INTERACTIVE GEOMETRIC VISUALIZATION WITH DYNAMIC GEOMETRY

Eglė Jasutė, Valentina Dagienė

Summary

The paper deals with the exploration of the concept of the interactive visualization of geometry. Some problems of construction sketches of dynamic geometry are discussed. There are described some didactic principles of interactive visualization with dynamic geometry: general for all the activity domain and special for the interactive picture. Construction principles of interactive visualization with

dynamic geometry (for geometry image and for the whole interactive picture) are also introduced. A model of interactive visualization with dynamic geometry is described and an example of its use in the visualization of an elementary school geometry theme is shown. Some suggestions on and directions for the further investigations are given.